ТОНКО ГОМОТОПІЧНО ЦИКЛІЧНІ ОПЕРАТОРИ ТА ЇХ ЗБЕРЕЖЕННЯ ПРИ НАПІВСПРЯЖЕННІ.

Атаманюк Б.В.

Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника
Івано-Франківськ, Україна

Різновиди спектральної рухомості досліджувались Геворкяном в його докторській дисертації [1]. Виявляється, що умова спектральної рухомості є необхідною для збереження гіперциклічності оператора [2].Спектральну рухомість досліджував К. Борсук [3].

В **теоремі 1** доведено, що коли в якості напівспряження брати гомотопічне домінування, то при такому напівспряженні зберігається спектральна рухомість. Отже буде зберігатися і гіперциклічність оператора (існує критерій в [2], в якому спектральна рухомість присутня пунктом 3.).

Теорема 1: *Якщо простір Y гомотопічно домінує над простором X, причому простір Y спектрально рухомий, то X також спектрально рухомий.*

Доведення.

Означення 1: Нагадаємо: простір *Y,* що є границею *H*–спектру $Y = \{Y_\beta, q_\beta\}$ спектрально рухомий, якщо виконується умова: для будь-якого $\beta \in B$ існує $\beta' \geq \beta$ таке, що для всякого $\beta'' \geq \beta'$ існує відображення $R_{\beta'\beta''}: Y_{\beta'} \to Y_{\beta''}$ таке, що виконується гомотопічна рівність: $q_{\beta''\beta} \circ R_{\beta'\beta''} \cong q_{\beta'\beta}$.

Позначимо цю гомотопічну комутативність символом (%).

Означення 2: Морфізмом зворотного спектра $X = \{X_\alpha, P_{\alpha'\alpha}, A\}$ в зворотний спектр $Y = \{Y_\beta, q_{\beta\beta'}, B\}$ називається така система $f = \{f_\beta, \phi\}$, де ϕ – відображення індексів, $\phi: B \to A$, а відображення $f_\beta: X_{\phi(\beta)} \to Y_\beta$ таке, що задовольняється умова: для будь-якої пари $\beta' \geq \beta$ існує індекс $\alpha \in A$, де $\alpha \geq \phi(\beta), \alpha \geq \phi(\beta')$, що виконується рівність: $f_\beta \circ p_{\alpha\phi(\beta)} \cong q_{\beta'\beta} \circ f_{\beta'} \circ p_{\alpha\phi(\beta')}$.

Означення 3: Гомотопічне домінування *Y* над *X* означає, що існують такі два морфізми між зворотними спектрами $f: X \to Y$ та $g: Y \to X$, для яких виконується умова: $g \circ f \cong Id_x$. Враховуючи, що $f = \{f_\beta, \phi\}$ та, де $\phi: B \to A$, $\psi: A \to B$ відображення індексів, одержимо, що $g \circ f = \{g_\alpha \circ f_{\psi\{\alpha\}}, \phi \circ \psi\} \cong Id_x$. Зауважимо, що $g_\alpha \circ f_{\psi(\alpha)}$ відображає простір $X_{\phi^2\psi(\alpha)}$ на X_α.

Означення 4: Гомотопія двох відображень $g \circ f \cong Id_x$ означає, що для всякого $\alpha \in A$, що $\gamma \geq \phi \circ \psi(\alpha)$ та $\gamma \geq Id(\gamma) = \gamma$, виконується гомотопічна рівність:

$$P_{\gamma\alpha} \cong g_\alpha \circ f_{\psi\alpha} \circ p_{\gamma,\phi\psi(\alpha)} \qquad (\#)$$

Зауважимо, що аморфізмом $g : Y \to X$ називається така система $g = \{g_\alpha, \phi\}$, що для будь-якого $\alpha' \geq \alpha$ існує $\Theta \geq \psi(\alpha')$, що виконується гомотопічна рівність:

$$p_{\alpha'\alpha} \circ g\alpha' \circ q_{\Theta\psi(\alpha')} \cong g\alpha \circ q_{\Theta\psi(\alpha)} \qquad (*)$$

Використаємо усі наведені означення для доведення теореми. Зафіксуємо довільний індекс $\alpha \in A$. Беремо $\beta = \psi(\alpha)$. Тоді із спектральної рухомості простору *Y* випливає, що існує індекс $\beta' \in B$, який задовольняє означення рухомості і такий, що $\beta' \geq \beta\psi(\alpha)$. Тоді для вибраної пари $\beta' \geq \beta$ з означення морфізму випливає, що існує $\delta \geq \phi(\beta) = \phi(\psi(\alpha))$ та $\delta \geq \phi(\beta')$, для яких виконується гомотопічна рівність:

$$f_\beta \circ p_{\delta\phi(\beta) \cong q_{\beta'\beta}} \circ f_{\beta'} \circ p_{\delta\phi\beta'} \qquad (\$)$$

Виберемо $\alpha' \geq \alpha$ таке, що виконуються умови $\alpha' \geq \delta$ та $\alpha' \geq \gamma$, де γ – індекс з означення гомотопічного домінування. Тоді одночасно виконуються гомотопічні рівності (#) та ($). Виберемо довільне $\alpha'' \geq \alpha'$. Тепер для пари $\alpha'' \geq \alpha'$ існує індекс $\Theta \in B$, для якого виконується гомотопічна рівність (*).

Отже для вибраних індексів одночасно виконуються (#), ($)та (*).

Задаємо відображення $r_{\alpha'\alpha''} : X_{\alpha'} \to X_{\alpha''}$ формулою: $r_{\alpha'\alpha''} = g_{\alpha''} \circ q_{\alpha\psi(\alpha'')} \circ R_{\beta'\alpha} \circ f_{\beta'} \circ p_{\alpha'\phi(\beta')}$. Перевіримо, чи виконується умова спектральної рухомості простору X, тобто $p_{\alpha''\alpha} \circ r_{\alpha'\alpha''} \cong p_{\alpha'\alpha}$. Справді, $p_{\alpha''\alpha} \circ r_{\alpha'\alpha''} \cong p_{\alpha''\alpha} \circ g_{\alpha''} \circ q_{\alpha\psi(\alpha'')} \circ R_{\beta'\alpha} f_{\beta'} \circ p_{\alpha'\phi(\beta')} \cong$

(за гомотопічною рівністю (*)) $\cong g_\alpha \circ q_{\alpha\psi(\alpha'')} \circ R_{\beta'\alpha} \circ f_{\beta'} \circ p_{\alpha'\phi(\beta')} \cong$

(за гомотопічною рівністю (%)) $\cong g_\alpha \circ q_{\beta'\beta} \circ f_{\beta'} \circ p_{\alpha'\phi(\beta')}$.

Остання композиція за рівністю ($) гомотопна такій композиції: $g_\alpha \circ f_\beta \circ p_{\alpha'\phi(\beta)} \cong$ (далі за рівністю (#)) $\cong p_{\alpha'\alpha}$.

Зауважимо, що за умовою транзитивності зворотного спектру при виборі $\alpha' \geq \gamma$ та $\alpha' \geq \delta$ зберігаються гомотопічні рівності (#) та ($) відповідно. Так само зберігається гомотопічна рівність (*) при виборі $\alpha \geq \Theta$ у зв'язку з гомотопічними рівностями $q_{\alpha\psi(\alpha'')} \cong q_{\Theta\psi(\alpha'')} \circ q_{\alpha\Theta}$ та

$q_{\alpha\psi(\alpha)} \cong q_{\alpha\beta} \cong q_{\Theta\beta} \circ q_{\alpha\Theta}$, що випливають з означення зворотного спектра. Отже спектральна рухомість простору *X* доведена і теорема 1 також.

Означення: Оператор T називається тонко гомотопічно циклічним, якщо (1) він гомотопічно циклічний, тобто існує гомотопія *H*, яка з'єднує орбіту оператора T із деякою іншою орбітою, яка всюди щільна у всьому просторі X; (2) гомотопія *H* має бути тонкою, тобто будь-якого покриття $\omega \in \mathrm{Cov}(X)$ існує своя гомотопія *H*, яка не виводить за межі даного покриття, тобто існує такий елемент $U_\alpha \in \omega$ покриття ω, що $\mathrm{Track}H(x) = \{H(x \times [0:1])\} \in U_\alpha$. Справедлива наступна теорема.

Теорема 2. *Якщо оператор T – гіперциклічний, то він буде тонко гомотопічно циклічним.*

Доведення очевидне з урахуванням тонкої гомотопії і того факту, що із суперциклічності випливає гомотопічна циклічність .

Доведемо ще одну теорему – про збереження спектральної рухомості монадичними функторами.

Наведемо необхідні факти з теорії монадичних функторів. ***Монадою на категорії К*** називається така трійка $T = \langle F, \eta, \psi \rangle$, де *F* – функтор, $\eta : \mathrm{Id} \to F$ та $\psi : F^2 \to F$ природні перетворення, що для будь-якого об'єкта *X* категорії *К* комутативними будуть наступні три діаграми (або справедливі такі рівності) :

1) $\psi_1 \circ F(\eta_x) = \mathrm{Id}_{F(x)}$;

2) $\psi_1 \circ \eta_{F(x)} = \mathrm{Id}_{F(x)}$;

3) $\psi_1 \circ F(\psi_1) = \psi_1 \circ \psi_2$.

Функтор *F* називається **монадичним,** якщо він входить в деяку монаду і є напівнормальним.

Нагадаємо, що природнім перетворенням функтора F в функтор *G* називається сімейство $\phi = \{\phi_X \mid X - \text{бікомпактний}\}$ таких відображень $\phi_X : F(X) \to G(X)$, що для кожного відображення $f : X \to Y$ комутативна наступна діаграма: $\phi_Y \circ F(f) = G(f) \circ \phi_X$. Якщо для функтора *F* виконуються тільки рівності (1) і (2) з означення монади, але не виконується рівність (3), то він називається ***напівмонадичним.***

Приклад напівмонадичного функтора – $\exp^2$.

Приклади монадичних функторів : $\exp$ – функтор експоненти , $\exp^c$ – континуальна експонента, *P* – функтор імовірнісних мір.

В якості проекції ψ для перших двох функторів $\exp$ та $\exp^c$ беремо ретракцію об'єднання, а в якості проекції ψ для *P* беремо $\phi(\mu) = \int \phi d\mu$.

Нагадаємо означення спектральної рухомості. Нехай дано зворотний спектр $\left\{X_{\alpha}, p_{\alpha}^{\alpha'}, A\right\}$. Він називається ***спектрально рухомим***, якщо для будь-якого індексу $\alpha \in A$ існує індекс $\alpha' \geq \alpha$, що для будь-якого $\alpha'' \in A$, $\alpha'' \geq \alpha'$ існує відображення $R_{\alpha'\alpha''} : X_{\alpha'} \to X_{\alpha''}$ таке, що наступна діаграма комутативна: $P_{\alpha}^{\alpha''} \circ R_{\alpha'\alpha''} \cong P_{\alpha}^{\alpha'}$.

Розглянемо зворотний спектр, об'єктами якого є ітеровані образи функтора *F*, тобто $F^2(x), F^3(x), \ldots$

Проекціями цього зворотного спектру нехай будуть відображення $\psi_2 : F^3(x) \to F^2(x)$, що є компонентами природного перетворення $\psi_2 : F^3 \to F^2$, а також їхні образи $F^k(\psi_2)$ при дії функтора *F* ***k*** разів (ітеровані функторіальні образи проекцій).

В якості множини індексів *A* вибираємо множину натуральних чисел **N**. Отже, маємо такий зворотний спектр $F^2(x) \leftarrow F^3(x) \xleftarrow[F^2(\phi_2)]{} F^4(x) \xleftarrow[F^2(\phi_2)]{} \ldots$ або в короткому записі $S_2 = \left\{F^k(x), F^{k-2}(\psi_2), N - \{1\}\right\}$. Розглянемо зворотний спектр $S_1 = \left\{F^k(x), F^{k-1}(\psi 1), N\right\}$. Розглянемо морфізм між двома зворотними спектрами, який задається парою $\left\{F^n(\psi_1) : F^{n+2}(X) \to F^{n+1}(X), \delta(n) = n+1\right\}$

Теорема 3. *Якщо зворотний спектр* S_2 *спектрально рухомий, функтор F– монадичний, то і зворотний спектр* S_1 *також спектрально рухомий.*

Доведення. Перевіряємо означення спектральної рухомості для зворотного спектру S_1. Зафіксуємо довільне число $k > 0$. Треба довести, що існує $n \geq k$ таке. що для будь-якого $i \geq n$ існує відображення $r_{ni} : F^n(x) \to F^i(x)$ для якого гомотопічно комутативною буде наступна діаграма: $F^{k-1}(\psi_1) \circ F^n(\psi_1) \circ \ldots \circ F^{k-2}(\psi_1) \circ r_{ni} \cong F^{k-1}(\psi_1) \circ F^k(\psi_1) \circ \ldots \circ F^{n-2}(\psi_1)$.

Беремо число $k+1 = \delta(k)$. Тоді за означенням спектральної рухомості стосовно спектру S_2 існує деяке число $m \geq \delta(k)$ таке, що для будь-якого $s \geq m$ існує відображення $R_{ms} : F^m(x) \to F^s(x)$, для якого буде гомотопічно комутативною наступна діаграма: $F^{k-1}(\psi_2) \circ F^k(\psi_2) \circ \ldots \circ F^{s-3}(\psi_2) \circ R_{ms} \cong F^{k-1}(\psi_2) \circ F^k(\psi_2) \circ \ldots \circ F^{n-3}(\psi_2)$. Позначимо її символом (*).

Виберемо $n = m-1$. Зафіксуємо довільне $i \geq n$. Виберемо $s \in N$ таким, щоб s задовольняло означенню спектрального морфізму, тобто $s \geq \delta(n) = m$ та $s \geq \delta(i) = i+1 \geq m$ причому наступна діаграма комутативна:

$F^{n-1}(\psi_1)\circ\ldots\circ F^{i-2}(\psi_1)\circ F^{i-1}(\psi_1)\circ F^{\delta(i)-2}(\psi_2)\circ\ldots$

$\circ F^{s-3}(\psi_2)=F^{n-1}(\psi_1)\circ F^{m-2}(\psi_2)\circ\ldots\circ F^{s-3}(\psi_2)$

Позначимо цю формулу символом (#).

Тепер задаємо відображення $r_{ni}:F^n(X)\to F^i(X)$ формулою: $r_{ni}=F^{i-1}(\psi_1)\circ F^{\delta(i)-2}(\psi_2)\circ\ldots\circ F^{s-3}(\psi_2)\circ R_{ms}\circ F^n(\eta)$. Позначимо цю формулу через ($).

Перевіряємо гомотопічну комутативність.

$F^{k-1}(\psi_1)\circ F^k(\psi_1)\circ\ldots\circ F^{i-2}(\psi_1)\circ r_{ni}=F^{k-1}(\psi_1)\circ F^k(\psi_1)\circ\ldots\circ F^{i-2}(\psi_1)\circ$

$\circ F^{i-1}(\psi_1)\circ F^{i-1}(\psi_2)\circ F^i(\psi_2)\circ\ldots\circ F^{s-3}(\psi_2)\circ R_{ms}\circ F^n(\eta)=F^{k-1}(\psi_1)\circ$

$\circ F^k(\psi_1)\circ\ldots\circ F^{n-1}(\psi_1)\circ F^{i-2}(\psi_1)\circ F^{i-1}(\psi_1)\circ F^{i-1}(\psi_2)\circ F^{i-1}(\psi_2)\circ F^i(\psi_2)\circ\ldots$

$\circ F^{s-3}(\psi_2)\circ R_{ms}\circ F^n(\eta)=F^{k-1}(\psi_1)\circ F^k(\psi_1)\circ\ldots\circ F^{n-1}(\psi_1)\circ F^{m-2}(\psi_2)\circ\ldots$

$\circ F^{s-3}(\psi_2)\circ R_{ms}\circ F^n(\eta)$

Використаємо формулу (#) для чисел *k, n,* а також комутативність діаграми з означення спектрального морфізму. Тоді формула (#) матиме вигляд:

$F^{k-1}(\psi_1)\circ F^k(\psi_1)\circ\ldots\circ F^{n-1}(\psi_1)\circ F^{m-2}(\psi_2)\circ\ldots\circ F^{s-3}(\psi_2)=$

$F^{k-1}(\psi_1)\circ F^{k-1}(\psi_2)\circ\ldots\circ F^{s-3}(\psi_2)$

Тут ми не обмежуємо загальності і вважаємо, що число *s* уже вибране максимальним для обох формул (#) по парах *(k,i)* та *(n,i),* а також для формули ($). Підставляючи формулу (#), одержимо:

$F^{k-1}(\psi_1)\circ F^{k-1}(\psi 2)\circ\ldots\circ F^{s-3}(\psi_2)\circ R_{ms}\circ F^n(\eta_X)$.

Застосуємо формулу (*) і одержимо:

$$F^{k-1}(\psi_1)\circ F^{k-1}(\psi_2)\circ\ldots\circ F^{s-3}(\psi_2)\circ R_{ms}\cong$$
$$\cong F^{k-1}(\psi_1)\circ F^{k-1}(\psi 2)\circ\ldots\circ F^{n-3}(\psi_2).$$

Підставимо в попередню формулу і одержимо:

$F^{k-1}(\psi_1)\circ F^{k-1}(\psi 2)\circ\ldots\circ F^{s-3}(\psi_2)\circ R_{ms}\circ F^n(\eta_X)\cong$

$\cong F^{k-1}(\psi_1)\circ F^{k-1}(\psi 2)\circ\ldots\circ F^{n-3}(\psi_2)\circ F^n(\eta_X)$

Використаємо умову монадичності функтора *F:*

$\psi_1\circ\psi_2=\psi_1\circ F(\psi_1)$, тоді застосовуючи F^{k-1} до обох частин, ми отримаємо: $F^{k-1}(\psi_1)\circ F^{k-1}(\psi_2)=F^{k-1}(\psi_1)\circ F^k(\psi_1)$. Далі за індукцією допускаємо, що

$F^{k-1}(\psi_1)\circ F^{k-1}(\psi 2)\circ\ldots\circ F^{n-4}(\psi_2)=F^{k-1}(\psi_1)\circ F^k(\psi_1)\circ\ldots\circ F^{n-3}(\psi_1)$.

Застосовуючи цю формулу до $F^{n-3}(\psi_2)$, ми отримаємо:

$$F^{k-1}(\psi_1)\circ F^{k-1}(\psi 2)\circ\ldots\circ F^{n-4}(\psi_2)\circ F^{n-3}(\psi_2)=$$
$$F^{k-1}(\psi_1)\circ F^{k}(\psi_1)\circ\ldots\circ F^{n-3}(\psi_1)\circ F^{n-3}(\psi_2)=F^{k-1}(\psi_1)\circ\ldots F^{n-3}(\psi_1\circ\psi_2)=$$
$$F^{k-1}(\psi_1)\circ\ldots\circ F^{n-3}(\psi_1)\circ F^{n-2}(\psi_1)$$

Отже, формула вірна для всіх $n\in N$. В результаті маємо:

$$F^{k-1}(\psi_1)\circ F^{k}(\psi_1)\circ\ldots\circ F^{n-2}(\psi_1)\circ F^{n}(\eta_X)=F^{k-1}(\psi_1)\circ\ldots\circ F^{n-1}(\psi_1\circ F(\eta_X)).$$

Тепер за умовою монадичності функтора *F* маємо:

$\psi_1\circ F(\eta_X)=Id_{F(X)}$. Застосувавши функтор F^{n-1}, одержимо:

$$F^{k-1}(\psi_1)\circ\ldots\circ F^{n-1}(\psi_1\circ F(\eta_X))=F^{k-1}(\psi_1)\circ\ldots\circ F^{n-2}\left(Id_{F(X)}\right)=$$
$$F^{k-1}(\psi_1)\circ\ldots\circ F^{n-2}(\psi_1)\circ Id_{F^{n}(X)}=F^{k-1}(\psi_1)\circ\ldots\circ F^{n-2}(\psi_1),$$

що і треба було довести. Теорема 3 доведена.

Зауважимо, що теорема 3 про збереження спектральної рухомості зворотного спектру, утвореного монадичним функтором також ілюструє збереження тонкої гомо топічної циклічності оператора, коли орбіта породжена цим монадичним функтором.

Зауважимо також, що теорема 1 справедлива для інших видів спектральної рухомості, зокрема, для категорної рухомості Мардешича та еквіваріантної рухомості. В якості напівспряження можна брати також шейпове домінування.

В теоремі 2, той факт , що із суперциклічності випливає гомотопічна циклічність, доведено Оксаною Атаманюк за допомогою побудови гомотопії між двома орбітами з цілочисельними коефіцієнтами. Така гомотопія задається формулами:

$H(x,t)=\{H_n(x,t),(x,t)\in X\times\Delta_n : n\in N\}$, причому $\Delta_n=\left[\frac{2^n-1}{2^n},\frac{2^n-1}{2^n}\right]$.

Далі, гомотопія $H_n(x,t)=\left[2^n(t-1)+(n+2)\right]\cdot Orb(T,x)$, задана на будь-якому відрізку Δ_n. Всюди щільність образу гомотопії $H(X\times[0,1])$ випливає із суперциклічності оператора T, тобто із всюди щільності у просторі X такої множини: $\{\lambda T^n(X), n\in N;\lambda\in K\}$. Суперциклічність оператора T означає топологічну транзитивність проективної орбіти $\{\lambda\cdot Orb(T,x);\lambda\in R\}$.

ЛІТЕРАТУРА

1. Геворкян П.С. Обобщенная теория шейпов и подвижность непрерывных групп преобразований. Диссерт. Доктора физ.-мат. наук. Москва 2001. 212 С.

2. Frederic Bayart, Etienne Matheron. Dynamics of linear operators. Cambridge tracts in mathematics. 2009.

3. Borsuk K. Theory of Shape. Warszawa: PWN. 1975.