МНОГОМОДАЛЬНЫЕ АНАЛОГИ НЕКОТОРЫХ БИМОДАЛЬНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

Бабаева Е. В.

Харьковский национальный университет строительства и архитектуры, Украина

Работа посвящена кинетической теории газов, являющейся одной из важнейших областей статистической физики. Основным средством изучения достаточно разреженного газа является кинетическое уравнение Больцмана, которое представляет собой нелинейное интегро–дифференциальное уравнение в частных производных [1].

Уравнение Больцмана для модели твердых сфер имеет вид:

$$D(f)=Q(f,f) \tag{1}$$

где
$$D(f)=\frac{\partial f}{\partial t}+v\frac{\partial f}{\partial x} \tag{2}$$

$$\begin{aligned}Q(f,f)=\frac{d^2}{2}\int_{R^3}dv_1\int_{\Sigma}d\alpha B(v-v_1,\alpha)\times\\ \times\left[f(t,v_1',x)f(t,v',x)-f(t,v_1,x)f(t,v,x)\right]\end{aligned} \tag{3}$$

где d – диаметр молекул, $t\in R^1$ – время, $x=(x^1,x^2,x^3)$ – координата частицы, $v=(v^1,v^2,v^3)$ – ее скорость, $f(t,v,x)$ – искомая функция распределения частиц, $\sum$ – единичная сфера в R^3, $\alpha\in\sum$, v',v_1' – скорости частиц после столкновения, $B(v-v_1,\alpha)=|(v-v_1,\alpha)|$ [2].

В работах [3–8] построены явные приближенные решения уравнения Больцмана для твердых сфер, которые являются бимодальными. При этом использовалась “смешанная” невязка (равномерно–интегральная норма разности между $D(f)$ и $Q(f,f)$):

$$\Delta=\sup_{(t,x)\in R^4}\int_{R^3}\left|D(f)-Q(f,f)\right|dv \tag{4}$$

Данная работа посвящена исследованию, направленному на построение многомодальных приближенных решений уравнения Больцмана. Речь идет о функциях такого вида:

$$f(t,v,x)=\sum_{i=1}^{m}\phi_i M_i \tag{5}$$

$$\phi_i=\phi_i(t,x)\geq 0, i=1,...,m \tag{6}$$

$$M_i = M_i(v) = \rho_i \left(\frac{\beta_i}{\pi}\right)^{3/2} e^{-\beta_i (v-\bar{v}_i)^2}, i = 1,...,m \tag{7}$$

Параметры максвеллианов M_i таковы: $\rho_i > 0$ – плотности, $\beta_i = \frac{1}{2T_i}$ – обратные температуры, $\bar{v}_i \in R^3$ – массовые скорости.

При поиске приближенных решений (5)–(7) уравнения Больцмана для модели твердых сфер, в частности, рассматриваются коэффициентные функции типа разбиения единицы.

В данной работе приближенные многомодальные (в частности тримодальные) решения ищутся с учетом обеспечения малости невязки (4) за счет соответствующего выбора коэффициентных функций и некоторых других параметров [9].

Теорема. *Пусть невязка имеет вид (4), распределение* f *представлено в виде (5)– (7) с произвольными* $\rho_i > 0$ *и* v_i, $m = 3$*, а функции* ϕ_i *таковы:*

$$\begin{gathered}\phi_1(t,x) = (1 + C_1([x \times (\bar{v}_2 - \bar{v}_1)]) - \\ - t[\bar{v}_2 \times \bar{v}_1])e^{-\frac{\pi d^2(\rho_1+\rho_2)}{|\bar{v}_2-\bar{v}_1|}(\bar{v}_2-\bar{v}_1, x-\frac{\rho_1\bar{v}_1+\rho_2\bar{v}_2}{\rho_1+\rho_2}t)\}})^{-1} \\ \phi_2(t,x) = 1 - \phi_1(t,x) \\ \phi_3(t,x) = C_3(x - \bar{v}_3 t)\end{gathered} \tag{8}$$

где C_i *– произвольные гладкие неотрицательные ограниченные функции указанных аргументов.*

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ *найдется такое* $d_0 > 0$*, что для всех* $d < d_0$ *существует такое* $\beta_0 > 0$*, что при любых* $\beta_i, \beta_i > \beta_0, i = 1,2,3$ *справедливо неравенство:* $\Delta < \varepsilon$

То есть

$$\lim_{d \to 0} \lim_{\substack{\beta_i \to +\infty \\ i=1,3}} \Delta = 0 \tag{9}$$

Доказательство. В работе [10] была минимизирована равномерно–интегральная невязка (4) и получено выражение следующего вида:

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{\beta_i \to +\infty \\ i=1,...,m}} \Delta' = \sum_{i=1}^{3} \rho_i \sup_{(x,t)\in R^3 \times R^1} \left| \frac{\partial \phi_i}{\partial t} + \bar{v}_i \frac{\partial \phi_i}{\partial x} + \pi d^2 \phi_i \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{3} \rho_j \left|\bar{v}_j - \bar{v}_i\right| \phi_j \right| + \\ + 2\pi d^2 \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{3} \rho_i \rho_j \left|\bar{v}_i - \bar{v}_j\right| \sup_{(x,t)\in R^3 \times R^1} (\phi_i \phi_j)\end{aligned} \tag{10}$$

где $\Delta \le \Delta'$

При $d \to 0$ выражение (10) приобретает следующий вид:

$$\lim_{\substack{\beta_i \to +\infty \\ i=1,2,3}} \Delta' = \sum_{i=1}^{3} \rho_i \sup_{(x,t)\in R^3\times R^1} \left| \frac{\partial \phi_i}{\partial t} + \overline{v_i} \frac{\partial \phi_i}{\partial x} + \pi d^2 \phi_i \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{3} \rho_j \left|\overline{v_j} - \overline{v_i}\right| \phi_j \right| \qquad (11)$$

С целью минимизировать выражение (11) составляем систему уравнений:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \phi_1}{\partial t} + \overline{v_1}\frac{\partial \phi_1}{\partial x} = -\pi d^2 \phi_1 (\rho_2 \left|\overline{v_2} - \overline{v_1}\right| \phi_2 + \rho_3 \left|\overline{v_3} - \overline{v_1}\right| \phi_3) \\
&\frac{\partial \phi_2}{\partial t} + \overline{v_2}\frac{\partial \phi_2}{\partial x} = -\pi d^2 \phi_2 (\rho_1 \left|\overline{v_2} - \overline{v_1}\right| \phi_1 + \rho_3 \left|\overline{v_3} - \overline{v_2}\right| \phi_3) \\
&\frac{\partial \phi_3}{\partial t} + \overline{v_3}\frac{\partial \phi_3}{\partial x} = -\pi d^2 \phi_3 (\rho_1 \left|\overline{v_3} - \overline{v_1}\right| \phi_1 + \rho_2 \left|\overline{v_3} - \overline{v_2}\right| \phi_2)
\end{aligned} \qquad (12)$$

где данные функции удовлетворяют системе лишь приближенно, при условии, что $d \to 0$. Используя условие (8) система приобретает вид:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \phi_1}{\partial t} + \overline{v_1}\frac{\partial \phi_1}{\partial x} = -\pi d^2 \phi_1 (\rho_2 \left|\overline{v_2} - \overline{v_1}\right| (1-\phi_1) + \rho_3 \left|\overline{v_3} - \overline{v_1}\right| \phi_3) \\
&\frac{\partial \phi_1}{\partial t} + \overline{v_2}\frac{\partial \phi_1}{\partial x} = \pi d^2 (1-\phi_1)(\rho_1 \left|\overline{v_2} - \overline{v_1}\right| \phi_1 + \rho_3 \left|\overline{v_3} - \overline{v_2}\right| \phi_3) \\
&\frac{\partial \phi_3}{\partial t} + \overline{v_3}\frac{\partial \phi_3}{\partial x} = -\pi d^2 \phi_3 (\rho_1 \left|\overline{v_3} - \overline{v_1}\right| \phi_1 + \rho_2 \left|\overline{v_3} - \overline{v_2}\right| (1-\phi_1))
\end{aligned} \qquad (13)$$

Проверим, что данные функции удовлетворяют первому уравнению системы. Продифференцировав функцию $\phi_1(t,x)$, получили следующие результаты:

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial x^i} = -\phi_1^2 \{\exp\{(-1)\frac{\pi d^2(\rho_1+\rho_2)}{|\overline{v}_2 - \overline{v}_1|}(x - \overline{v}_1 t, \overline{v}_2 - \overline{v}_1) + \pi d^2 \rho_2 |\overline{v}_2 - \overline{v}_1| t\} \times$$

$$\times C_1'([x-\overline{v}_1 t)\times(\overline{v}_2 - \overline{v}_1)]) \times (\frac{\partial}{\partial x^i}(x \times (\overline{v}_2 - \overline{v}_1)) + C_1([x-\overline{v}_1 t)\times(\overline{v}_2 - \overline{v}_1)]) \times$$

$$\times \exp\{(-1)\frac{\pi d^2(\rho_1+\rho_2)}{|\overline{v}_2 - \overline{v}_1|}(x - \overline{v}_1 t, \overline{v}_2 - \overline{v}_1) + \pi d^2 \rho_2 |\overline{v}_2 - \overline{v}_1| t\} \frac{\pi d^2(\rho_1+\rho_2)}{|\overline{v}_2 - \overline{v}_1|}(v_1^{\,i} - v_2^{\,i})\}$$

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial t} = -\phi_1^2 \{-[\overline{v}_2 \times \overline{v}_1] \exp\{(-1)\frac{\pi d^2(\rho_1+\rho_2)}{|\overline{v}_2 - \overline{v}_1|}(x - \overline{v}_1 t, \overline{v}_2 - \overline{v}_1) + \pi d^2 \rho_2 |\overline{v}_2 - \overline{v}_1| t\} \times$$

$$\times C'([x-\overline{v}_1 t)\times(\overline{v}_2 - \overline{v}_1)]) + C([x-\overline{v}_1 t)\times(\overline{v}_2 - \overline{v}_1)]) \exp\{(-1)\frac{\pi d^2(\rho_1+\rho_2)}{|\overline{v}_2 - \overline{v}_1|} \times$$

$$\times (x - \overline{v}_1 t, \overline{v}_2 - \overline{v}_1) + \pi d^2 \rho_2 |\overline{v}_2 - \overline{v}_1| t\} \frac{\pi d^2(\rho_1+\rho_2)}{|\overline{v}_2 - \overline{v}_1|} \times (\overline{v}_2 - \overline{v}_1, \frac{\rho_1 \overline{v}_1 + \rho_2 \overline{v}_2}{\rho_1 + \rho_2})\}$$

Найденные выражения для производных подставим в первое уравнение системы (12) и после некоторых преобразований получим следующее уравнение:

$$(1-\phi_1)\frac{\pi d^2}{|\overline{v}_2-\overline{v}_1|}((({v_1}^1)^2+({v_1}^2)^2+({v_1}^3)^2-{v_1}^1{v_2}^1-{v_1}^2{v_2}^2-{v_1}^3{v_2}^3)(\rho_1+\rho_2)+$$
$$+(\overline{v}_2-\overline{v}_1,\rho_1\overline{v}_1+\rho_2\overline{v}_2))=\rho_2\pi d^2\,|\overline{v}_2-\overline{v}_1|(1-\phi_1)+\pi d^2\rho_3\left|\overline{v_3}-\overline{v_1}\right|\phi_3$$

которое преобразуется к виду:

$$\rho_2\pi d^2\,|\overline{v}_2-\overline{v}_1|(1-\phi_1)=\rho_2\pi d^2\,|\overline{v}_2-\overline{v}_1|(1-\phi_1)+\pi d^2\rho_3\left|\overline{v_3}-\overline{v_1}\right|\phi_3$$

При $d\to 0$ выражение $\pi d^2\rho_3\left|\overline{v_3}-\overline{v_1}\right|\phi_3\to 0$, а значит, функции являются приближенным решением первого уравнения системы (13), аналогично проверяется второе уравнение системы.

Проверим, удовлетворяет ли третье выражение из (8) системе уравнений:

$$\frac{\partial\phi_3}{\partial t}+\overline{v_3}\frac{\partial\phi_3}{\partial x}=-\pi d^2\phi_3(\rho_1\left|\overline{v_3}-\overline{v_1}\right|\phi_1+\rho_2\left|\overline{v_3}-\overline{v_2}\right|(1-\phi_1))$$

Продифференцировав его, получили:

$$\frac{\partial\phi_3}{\partial t}=C_3'(x-\overline{v}_3t)(-\overline{v}_3)\qquad\qquad\frac{\partial\phi_3}{\partial x}=C_3'(x-\overline{v}_3t)$$

В результате получаем следующее равенство:

$$C_3'(x-\overline{v}_3t)(-\overline{v}_3)+\overline{v}_3C_3'(x-\overline{v}_3t)=0$$

При $d\to 0$ выражение $-\pi d^2\phi_3(\rho_1\left|\overline{v_3}-\overline{v_1}\right|\phi_1+\rho_2\left|\overline{v_3}-\overline{v_2}\right|(1-\phi_1))\to 0$, а значит, данные функции являются приближенным решением третьего уравнения системы (13). Теорема доказана.

Замечание. В данной теореме можно предположить, что C_i – финитные функции, т.е. $\mathrm{supp}\,\phi_2\bigcap\mathrm{supp}\,\phi_3=\varnothing$. Тогда в правой части системы (12) из шести слагаемых четыре обратятся в ноль и только два будут стремиться к нулю.

Выводы. Таким образом, в работе получены различные достаточные условия стремления к нулю равномерно–интегральной невязки между левой и правой частями уравнения (1), и тем самым построены некоторые новые приближенные решения уравнения Больцмана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Черчиньяни К. Теория и приложения уравнения Больцмана. – М.:Мир. – 1978. – 495 с.
2. Карлеман Т. Математические задачи кинетической теории газов. – М.:Изд-во иностранной литературы. – 1960. – 118 с.
3. Hosokawa I., Yamamoto K. Nonexistence of Any Exact Bimodal Solution for the Shock Wave Structure // J. Phys. Soc. Japan. – 1988.– v. 57, N6. – P.1865 – 1867.
4. Mott– Smith H.M. The Solution of the Boltzman Equation for a Shock Wave // Phys. Rev. – 1951. – v.82, N 6. – P.885– 890.
5. Salven H., Grosh C., Ziering S. Extension of the Mott–Smith Method for a One-Dimentional Shock Wave // Phys. Fluids. – 1964. – V. 7, N 2. – P. 180– 189.
6. Гордевский В.Д. Приближенное бимодальное решение уравнения Больцмана для твердых сфер // Матем. физика, анализ, геом. – 1995. – т.2,N2. – С.168– 176.
7. Гордевский В.Д. Критерий малости невязки для бимодального решения уравнения Больцмана // Матем. физика, анализ, геом. – 1997.– т.4, N1/2. – С.46– 58.
8. Гордевский В.Д. Приближенное двухпотоковое решение уравнения Больцмана // Теоретич. и матем. физика. – 1998. – т.114 N1. – С.126– 136.
9. Gordevsky V.D. Trimodal Approximate Solutions of the Non-linear Boltzmann Equation // Math. Meth. Appl. Sci. – 1998. – V.21. – P. 1479– 1494.
10. Гордевский В.Д. О многомодальных приближенных решениях нелинейного уравнения Больцмана // Крайові задачі для диференціальних рівнянь. Чернівецький державний університет ім. Ю. Федьковича. – 1999.– Вип. 4.– С. 33– 51.