ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ИНВАРИАНТЫ НАТУРАЛЬНЫХ СИСТЕМ С ДВУМЯ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

Багдерина Ю. Ю.

Институт математики с ВЦ УНЦ РАН, г. Уфа, Россия

Системы уравнений Эйлера–Лагранжа часто возникают в различных задачах математики и механики. Прежде чем интегрировать подобные системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), имеет смысл проверить, не сводятся ли они некоторой заменой переменных к какой-либо системе, решение которой уже известно, или являющейся более простой для интегрирования.

Наиболее часто в приложениях встречаются системы, лагранжиан которых имеет квадратичную зависимость от скоростей (здесь и далее для первых производных будет использоваться обозначение $p_i = dx_i/dt$). В данной работе рассматривается система с двумя степенями свободы

$$\frac{d}{dt}L_{p_1} - L_{x_1} = 0, \quad \frac{d}{dt}L_{p_2} - L_{x_2} = 0 \tag{1}$$

с лагранжианом $L(t, x_1, x_2, p_1, p_2)$, удовлетворяющим условию

$$L_{p_1p_1p_1} = 0, \quad L_{p_1p_1p_2} = 0, \quad L_{p_1p_2p_2} = 0, \quad L_{p_2p_2p_2} = 0, \tag{2}$$

замкнутая относительно точечных преобразований вида

$$\bar{t} = \theta(t),\ \bar{x}_1 = \phi_1(t, x_1, x_2),\ \bar{x}_2 = \phi_2(t, x_1, x_2),\ \partial(\theta, \phi_1, \phi_2)/\partial(t, x_1, x_2) \neq 0. \tag{3}$$

Одна из основных задач теории эквивалентности дифференциальных уравнений состоит в том, чтобы для данного ОДУ, принадлежащего определенному классу уравнений, найти другое ОДУ (с известным решением) из того же класса, которому оно эквивалентно относительно некоторой замены переменных. Замены переменных, не выводящие уравнения за пределы заданного класса, образуют его группу преобразований эквивалентности. Для системы (1), (2) преобразованием эквивалентности является (3). После того как установлено, что два уравнения эквивалентны, следующей задачей является нахождение связывающего их преобразования.

Обе эти задачи могут быть решены с помощью инвариантов группы преобразований эквивалентности рассматриваемого класса уравнений, поскольку если две системы с лагранжианами $L(t, x_1, x_2, p_1, p_2)$ и $\bar{L}(t, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{p}_1, \bar{p}_2)$ эквивалентны, то все их инварианты равны:

$$I_1(t, x, p) = \bar{I}_1(\bar{t}, \bar{x}, \bar{p}),\ \ I_2(t, x, p) = \bar{I}_2(\bar{t}, \bar{x}, \bar{p}),$$

и т.д. Также инварианты являются эффективным средством доказательства неэквивалентности уравнений. Например, при доказательстве неприводимости какой-либо системы (1), (2) к системе с разделяющимися уравнениями и т.п.

Как правило, группа преобразований эквивалентности некоторого класса уравнений является бесконечной (зависит от произвольных элементов) и имеет бесконечное число дифференциальных инвариантов — функций вида

$$I_j = I_j(t, x, p, L, L_t, L_x, L_p, L_{tt}, \ldots, L_{pp}, L_{ttt}, \ldots).$$

Порядок инварианта определяется порядком входящей в него старшей производной функции L. При подстановке в формулу для инварианта I_j конкретной функции $L(t, x, p)$ он принимает вид $I_j = I_j(t, x, p)$.

Известно [1], что в бесконечном наборе дифференциальных инвариантов группы преобразований всегда существует конечный базис и произвольный инвариант группы может быть получен из базисных инвариантов применением к ним операторов инвариантного дифференцирования и алгебраических операций. Используя метод Овсянникова–Ли построения инвариантов бесконечных групп преобразований, в этой работе получены дифференциальные инварианты группы преобразований эквивалентности системы (1), (2). При $L_{p_1p_1}L_{p_2p_2} - L^2_{p_1p_2} \neq 0$ уравнения (1) разрешимы относительно вторых производных

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = f_1(t, x_1, x_2, p_1, p_2), \quad \frac{d^2x_2}{dt^2} = f_2(t, x_1, x_2, p_1, p_2). \quad (1')$$

Вводится оператор полной производной в силу системы (1)

$$D_0 = D_t + p_1 D_{x_1} + p_2 D_{x_2} + f_1 D_{p_1} + f_2 D_{p_2}$$

и операторы $D_i = D_{x_i} + \frac{1}{2}(f_{1p_i} D_{p_1} + f_{2p_i} D_{p_2}),\ i = 1, 2.$

Теорема 1. *Базис дифференциальных инвариантов системы (1), (2) образуют три инварианта четвертого порядка*

$$I_1 = \frac{J_1}{j_0^2 J_0^{3/4}}, \qquad I_2 = \frac{J_2}{j_0^{3/2} J_0^{5/4}}, \qquad I_3 = \frac{J_3}{j_0 J_0^{1/4}} \qquad (4)$$

и четыре инварианта пятого порядка

$$I_4 = \frac{J_4}{j_0^{1/2} J_0^{5/4}}, \quad I_5 = \frac{J_5}{j_0^2 J_0^{5/4}}, \quad I_6 = \frac{J_6}{j_0^{3/2} J_0^{7/4}}, \quad I_7 = \frac{J_7}{j_0^{3/2} J_0^{1/2}}. \quad (5)$$

Произвольный инвариант может быть получен из базисных инвариантов (4), (5) применением операторов инвариантного дифференцирования

$$\Delta_0 = J_0^{-1/4} D_0, \qquad \Delta_1 = j_0^{-1} J_0^{-1/2}[a_2 D_1 - a_1 D_2 + A_1 D_{p_2} - A_2 D_{p_1}],$$

$$\Delta_2 = j_0^{-3/2} J_0^{-1/2}[(L_{p_1p_2} a_2 - L_{p_2p_2} a_1) D_1 + (L_{p_1p_2} a_1 - L_{p_1p_1} a_2) D_2 + \\ + (L_{p_2p_2} A_1 - L_{p_1p_2} A_2) D_{p_1} + (L_{p_1p_1} A_2 - L_{p_1p_2} A_1) D_{p_2}],$$

$$\Delta_3 = j_0^{-1} J_0^{-1/4}[a_2 D_{p_1} - a_1 D_{p_2}],$$

$$\Delta_4 = j_0^{-3/2} J_0^{-1/4}[(L_{p_1p_2} a_2 - L_{p_2p_2} a_1) D_{p_1} + (L_{p_1p_2} a_1 - L_{p_1p_1} a_2) D_{p_2}].$$

Применяемые здесь обозначения для относительных инвариантов a_1, a_2, A_1, A_2, j_0, J_0, … , J_7 приводятся в Приложении в конце статьи.

Рассмотрим некоторые примеры применения инвариантов при установлении эквивалентности относительно преобразований вида (3) для систем, лагранжиан которых имеет квадратичную нелинейность по переменным p_1, p_2.

Пример 1. Для системы с лагранжианом

$$L(t, x_1, x_2, p_1, p_2) = p_1 p_2 + F(t, x_1, x_2)$$

вычисленные по формулам (4), (5) инварианты равны

$$I_1 = 0, \qquad I_2 = 0, \qquad I_3 = 0, \qquad I_5 = \frac{4(F_{x_1x_1x_1}F_{x_2x_2x_2} - F_{x_1x_1x_2}F_{x_1x_2x_2})}{(F_{x_1x_1}F_{x_2x_2})^{5/4}},$$

$$I_4 = \frac{F_{x_2x_2}(F_{tx_1x_1} + p_1F_{x_1x_1x_1} + p_2F_{x_1x_1x_2}) - F_{x_1x_1}(F_{tx_2x_2} + p_1F_{x_1x_2x_2} + p_2F_{x_2x_2x_2})}{\sqrt{-1}(F_{x_1x_1}F_{x_2x_2})^{5/4}},$$

$$I_6 = \frac{4[F_{x_1x_1}(F_{x_1x_1x_2}F_{x_2x_2x_2} - F^2_{x_1x_2x_2}) + F_{x_2x_2}(F^2_{x_1x_1x_2} - F_{x_1x_1x_1}F_{x_1x_2x_2})]}{\sqrt{-1}(F_{x_1x_1}F_{x_2x_2})^{7/4}}, \quad I_7 = 0.$$

Заменой переменных $\bar{x}_1 = (x_1 + x_2)/\sqrt{2}$, $\bar{x}_2 = i(x_2 - x_1)/\sqrt{2}$ эта система сводится к системе с лагранжианом

$$\bar{L}(t, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{p}_1, \bar{p}_2) = \frac{1}{2}\left(\bar{p}_1^2 + \bar{p}_2^2\right) + \bar{F}(t, \bar{x}_1, \bar{x}_2). \tag{6}$$

Таким образом, необходимым условием приводимости какой-либо системы (1), (2) к стандартному виду (6) является равенство нулю ее инвариантов I_1, I_2, I_3, I_7, зависимость инвариантов I_5, I_6 только от t, x_1, x_2 и не более чем линейная зависимость инварианта I_4 от p_1, p_2.

Пример 2. Системе с разделяющимися уравнениями соответствует лагранжиан

$$L = g_1(t, x)x'^2 + g_2(t, y)y'^2 + e_0(t, x, y) + e_1(t, x, y)x' + e_2(t, x, y)y',$$

причем с некоторыми функциями $X(t, x)$, $Y(t, y)$ выполняются соотношения

$$e_{2x} - e_{1y} = 0, \qquad e_{0x} = e_{1t} + g_1X, \qquad e_{0y} = e_{2t} + g_2Y.$$

Инварианты такой системы равны

$$I_1 = 0, \quad I_2 = 0, \quad I_3 = 0, \quad I_4 = 0, \quad I_5 = 0, \quad I_6 = -\frac{16b_{1x}b_{1y}}{\sqrt{g_1g_2b_1^5}}, \quad I_7 = 0, \tag{7}$$

где $b_1 = \dfrac{2(Y\sqrt{g_2})_y + (g_{2t}/\sqrt{g_2})_t}{4\sqrt{g_2}} - \dfrac{2(X\sqrt{g_1})_x + (g_{1t}/\sqrt{g_1})_t}{4\sqrt{g_1}}$. .

Пример 3. Решение типа бегущей волны уравнений движения двухслойной жидкости со свободной поверхностью описывается системой с лагранжианом [2, 3, с. 68]

$$L=\frac{\beta}{6x}\left(x'^2+3\right)+\frac{x'^2+x'y'+1}{2y}+\frac{y'^2}{6y}-\frac{g}{2}\left(\gamma x^2+2xy+y^2\right)-C_1x-C_2y.$$

Для нее отличны от нуля все инварианты (4), (5), в частности,

$$I_1=(6xy)^4(3x^2+\beta(6xy+y^2))J^{-3/4},$$

$$I_3=\frac{12(3x^2+\beta(6xy+y^2))^2(\beta yx'^2+x(3x'^2+3x'y'+y'^2))}{xy^4(3x+4\beta y)^2J^{1/4}}.$$

Здесь для краткости не приводится вид функции J, являющейся многочленом четвертой степени по x', y' с коэффициентами, зависящими от x, y. Таким образом, данная система неприводима ни к стандартному к виду (6), ни к системе с разделяющимися уравнениями каким-либо преобразованием вида (3).

Пример 4. В задаче о колебании маятника на упругой нити лагранжиан равен [4]

$$L=\frac{1}{2}\left(r'^2+r^2\theta'^2\right)+gr\cos\theta-\frac{g}{2c}(r-a)^2, \tag{8}$$

постоянные a — длина нерастянутой струны, $(a+c)$ — длина растянутой струны в положении статического равновесия, функции $r(t)$ — длина струны в некоторый момент времени t, $\theta(t)$ — угол ее отклонения от направленной вниз вертикали. Эта система имеет инварианты

$$I_k=0,\quad k=1,2,3,6,7,\qquad I_4=-4\sqrt{\frac{2c}{ga}}\sqrt{r}\theta',\qquad I_5=16\sqrt{\frac{2c}{ga}}r^{-3/2}.$$

и, следовательно, удовлетворяет всем перечисленным в Примере 1 необходимым условиям приводимости к виду (6). Действительно, в переменных $x_1=r\cos\theta$, $x_2=r\sin\theta$ получаем систему с лагранжианом

$$L=\frac{1}{2}\left(x_1'^2+x_2'^2\right)-\frac{1}{2c}\left(x_1^2+x_2^2\right)+gx_1+\frac{a}{c}\sqrt{x_1^2+x_2^2}.$$

Если сравнить полученные в этом примере инварианты с инвариантами (7), то можно сделать вывод: так как в данном случае инварианты I_4, I_5 отличны от нуля, система с лагранжианом (8) неприводима каким-либо преобразованием вида (3) к системе с разделяющимися уравнениями.

Пример 5. Лагранжиан системы Эно–Эйлеса

$$q_1''+c_1q_1=bq_1^2-aq_2^2,\qquad q_2''+c_2q_2=-2aq_1q_2, \tag{9}$$

($a,b,c_1,c_2=\mathrm{const}$) задается функцией

$$L=\frac{1}{2}\left(q_1'^2+q_2'^2-c_1q_1^2-c_2q_2^2\right)-aq_1q_2^2+\frac{1}{3}bq_1^3.$$

Относительные инварианты системы (9) равны

$$j_0=1,\quad J_0=(a+b)^2q_1^2+4a^2q_2^2+\frac{1}{4}(c_1-c_2)^2+(a+b)(c_2-c_1)q_1,$$

$$J_1=0,\quad J_2=0,\quad J_3=0,\quad J_4=4a(a+b)(q_1q_2'-q_2q_1')+2a(c_2-c_1)q_2',$$
$$J_5=16a(a+b),\qquad J_6=32a^2(b-a)q_2,\qquad J_7=0.$$

Нетрудно видеть, что система (9) удовлетворяет условиям (7) при значениях параметров $a/b=-1$, $c_1=c_2$, т.е. в одном из трех интегрируемых случаев, когда q_1 удовлетворяет ОДУ четвертого порядка, соответствующему стационарному решению уравнения Савады–Котеры. В [5] отмечено, что при таких соотношениях на параметры системы она разделяется в переменных q_1+q_2, q_1-q_2.

Работа выполнена при поддержке грантов МК–8247.2010.1, РФФИ 10–01–00186–а, 11– 01– 91330–ННИО–а и ФЦП (госконтракт 02.740.11.0612).

ЛИТЕРАТУРА

1. Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. – М.: Наука. – 1978. – 399 с.
2. Barros R., Gavrilyuk S.L. Dispersive nonlinear waves in two– layer flows with free surface Part II. Large amplitude solitary waves embedded into the continuous spectrum. // Stud. Appl. Math. – 2007. – v. 119, N 3. – P. 213– 251.
3. Нелинейные проблемы теории поверхностных и внутренних волн. / Л.В. Овсянников, Н.И. Макаренко, В.И. Налимов и др. – Новосибирск: Наука, 1985. — 318 с.
4. Парс Л.А. Аналитическая динамика. – М.: Наука, 1971. – 636 с.
5. Fordy A.P. The Hénon– Heiles system revisited. // Physica D. – 1991. – v. 52, N 2– 3. – P. 204–210.

ПРИЛОЖЕНИЕ.

В формулах (4), (5) относительные инварианты равны

$$J_1=L_{p_2p_2}a_1^2-2L_{p_1p_2}a_1a_2+L_{p_1p_1}a_2^2,\qquad J_2=b_2a_1^2-2b_1a_1a_2+b_0a_2^2,$$
$$J_3=D_1a_{0p_2}-D_2a_{0p_1}+\tfrac{1}{2}j_0^{-1}(a_{0p_1}D_2j_0-a_{0p_2}D_1j_0)+$$
$$+\tfrac{1}{4}j_0^{-1}(L_{p_2p_2}D_{p_1}^2-2L_{p_1p_2}D_{p_1}D_{p_2}+L_{p_1p_1}D_{p_2}^2)(L_{x_1p_1}L_{x_2p_2}-L_{x_1p_2}L_{x_2p_1}),$$
$$J_4=L_{p_1p_1}(b_2B_1-b_1B_2)+L_{p_1p_2}(b_0B_2-b_2B_0)+L_{p_2p_2}(b_1B_0-b_0B_1),$$
$$J_5=L_{p_1p_1}(\Gamma_2^2-\Gamma_1\Gamma_3)+L_{p_1p_2}(\Gamma_0\Gamma_3-\Gamma_1\Gamma_2)+L_{p_2p_2}(\Gamma_1^2-\Gamma_0\Gamma_2),$$
$$J_0=b_1^2-b_0b_2,\qquad J_6=b_0(\Gamma_2^2-\Gamma_1\Gamma_3)+b_1(\Gamma_0\Gamma_3-\Gamma_1\Gamma_2)+b_2(\Gamma_1^2-\Gamma_0\Gamma_2),$$
$$j_0=L_{p_1p_1}L_{p_2p_2}-L_{p_1p_2}^2,\qquad J_7=L_{p_2p_2}E_0-2L_{p_1p_2}E_1+L_{p_1p_1}E_2.$$

Здесь относительные инварианты третьего порядка равны

$$b_0=-\tfrac{1}{2}D_0f_{2p_1}+\tfrac{1}{4}f_{2p_1}(f_{1p_1}+f_{2p_2})+f_{2x_1},$$

$$b_1 = \tfrac{1}{4} D_0 (f_{1p_1} - f_{2p_2}) + \tfrac{1}{8} (f_{2p_2}^2 - f_{1p_1}^2) + \tfrac{1}{2} (f_{2x_2} - f_{1x_1}),$$

$$b_2 = \tfrac{1}{2} D_0 f_{1p_2} - \tfrac{1}{4} f_{1p_2} (f_{1p_1} + f_{2p_2}) - f_{1x_2},$$

а для относительных инвариантов четвертого порядка используются обозначения

$$a_i = D_{p_i}(D_0 a_0) - 2D_i a_0 - \tfrac{1}{2} j_0^{-1} a_{0p_i} D_0 j_0 + \tfrac{1}{2} (f_{1p_2} L_{x_i p_1 p_1} + (f_{2p_2} - f_{1p_1}) L_{x_i p_1 p_2} - f_{2p_1} L_{x_i p_2 p_2}),$$

$$A_i = \tfrac{1}{3} [D_0 a_i + a_i (f_{ip_i} + \tfrac{1}{2} f_{kp_k}) + \tfrac{1}{2} a_k f_{kp_i}], \quad \text{где} \quad a_0 = L_{x_1 p_2} - L_{x_2 p_1},$$

$$B_0 = D_0 b_0 + a_0 j_0^{-1} (L_{p_1 p_2} b_0 - L_{p_1 p_1} b_1) + \tfrac{1}{2} j_0^{-1} L_{p_1 p_1} (b_2 D_0 L_{p_1 p_1} - 2b_1 D_0 L_{p_1 p_2} + b_0 D_0 L_{p_2 p_2}),$$

$$B_1 = D_0 b_1 + a_0 j_0^{-1} (L_{p_1 p_2} b_1 - L_{p_1 p_1} b_2) + \tfrac{1}{2} j_0^{-1} L_{p_1 p_2} (b_2 D_0 L_{p_1 p_1} - 2b_1 D_0 L_{p_1 p_2} + b_0 D_0 L_{p_2 p_2}),$$

$$B_2 = D_0 b_2 + a_0 j_0^{-1} (L_{p_2 p_2} b_1 - L_{p_1 p_2} b_2) + \tfrac{1}{2} j_0^{-1} L_{p_2 p_2} (b_2 D_0 L_{p_1 p_1} - 2b_1 D_0 L_{p_1 p_2} + b_0 D_0 L_{p_2 p_2}),$$

$$\Gamma_0 = \varphi_1, \qquad \Gamma_i = \psi_i - (-1)^i \cdot 2A_i, \qquad \Gamma_3 = \varphi_2, \qquad E_0 = \chi_1, \qquad E_2 = \chi_2,$$

$$E_1 = \sum_{i=1}^{2} [\tfrac{1}{2} D_i a_k + \tfrac{1}{4} (-1)^i a_{0p_i} j_0^{-1} (L_{p_1 p_2} a_k - L_{p_k p_k} a_i) +$$
$$+ \tfrac{1}{4} a_i j_0^{-1} (L_{p_1 p_2} L_{x_i p_k p_k} - L_{p_k p_k} L_{x_i p_1 p_2}) +$$
$$+ \tfrac{1}{4} a_k j_0^{-1} (3L_{p_1 p_2} L_{x_i p_1 p_2} - L_{p_k p_k} L_{x_i p_i p_i} - 2L_{p_i p_i} L_{x_i p_k p_k})],$$

$$\chi_i = D_i a_i + \tfrac{1}{2} (-1)^i a_{0p_i} j_0^{-1} (L_{p_i p_i} a_k - L_{p_1 p_2} a_i) +$$
$$+ \tfrac{1}{2} a_k j_0^{-1} (L_{p_1 p_2} L_{x_i p_i p_i} - L_{p_i p_i} L_{x_i p_1 p_2}) +$$
$$+ \tfrac{1}{2} a_i j_0^{-1} (3L_{p_1 p_2} L_{x_i p_1 p_2} - 2L_{p_k p_k} L_{x_i p_i p_i} - L_{p_i p_i} L_{x_i p_k p_k})],$$

$$\varphi_i = j_0^{1/2} D_0^2 (j_0^{-1/2} L_{x_i p_i p_i}) - 2D_0 L_{x_i x_i p_i} + 2L_{x_i x_i x_i} - f_{kp_k} D_0 L_{x_i p_i p_i} +$$
$$+ f_{kp_i} (D_0 L_{x_k p_i p_i} - (-1)^i \cdot 2D_i a_0) + (L_{x_k p_i p_i} - 2L_{x_i p_1 p_2})(D_i f_k - (-1)^i \cdot 2b_1) +$$
$$+ L_{x_i p_i p_i} [f_{ip_i}^2 + \tfrac{1}{2} (f_{1p_2} f_{2p_1} - f_{1p_1} f_{2p_2}) - (-1)^i \cdot 2b_l - 2D_i f_i - D_k f_k] +$$
$$+ (L_{x_k p_i p_i} + L_{x_i p_1 p_2}) f_{1p_i} f_{2p_i} + L_{x_k p_1 p_2} f_{kp_i}^2,$$

$$\psi_i = j_0^{1/2} D_0^2 (j_0^{-1/2} L_{x_k p_i p_i}) - 2D_0 L_{x_1 x_2 p_i} + 2L_{x_i x_i x_k} +$$
$$+ f_{kp_i} (D_0 L_{x_k p_1 p_2} - (-1)^i D_k a_0) - f_{kp_k} (D_0 L_{x_i p_1 p_2} + (-1)^i D_i a_0) +$$
$$+ L_{x_i p_i p_i} (\tfrac{1}{2} f_{ip_1} f_{ip_2} - D_k f_i) + L_{x_i p_1 p_2} [\tfrac{1}{2} (f_{1p_2} f_{2p_1} - f_{1p_1} f_{2p_2}) - 2D_k f_k)] +$$
$$+ L_{x_i p_k p_k} [(-1)^i \cdot 2b_l - \tfrac{1}{2} f_{kp_1} f_{kp_2}] + L_{x_k p_1 p_2} f_{kp_i} (f_{1p_1} + f_{2p_2}) + \tfrac{1}{2} L_{x_k p_k p_k} f_{kp_i}^2 +$$
$$+ L_{x_k p_i p_i} [\tfrac{1}{2} (f_{ip_i}^2 + f_{1p_2} f_{2p_1} + f_{1p_1} f_{2p_2}) - (-1)^i \cdot 2b_l - D_i f_i],$$

$$i = 1, 2, \quad k = 3 - i, \quad l = i(i-1).$$