

О ДЕФОРМАЦИИ МНОГОСЛОЙНЫХ АСБЕСТОВЫХ НАНОТРУБОК С НАПОЛНИТЕЛЕМ

Бауэр С. М., Ермаков А. М., Каитанова С. В., Морозов Н. Ф.

СПбГУ, Санкт-Петербург, Российская Федерация

В настоящее время активно обсуждается возможность применения методов классической механики к нанобъектам. В работах [1, 2] отмечается, что механические характеристики, соответствующие наноразмерным структурным элементам, таким как балки и пластинки могут отличаться от механических характеристик, соответствующих структурам из того же материала, имеющим «обычные» геометрические размеры. В работах [3, 4] обсуждаются результаты экспериментов, проведенных в физико-техническом институте имени А.Ф. Иоффе РАН, в которых исследовались механические свойства нанотрубок из природного хризолитового асбеста. Внутренняя полость трубки была заполнена водой, ртутью или теллуром под давлением. В эксперименте с помощью сканирующей зондовой микроскопии (СЗМ) измерялась жесткость нанотрубки. Под жесткостью понималось отношение приложенной силы к величине прогиба мостика, сформированного нанотрубкой, перекрывающей отверстие в пористой подложке. Эксперименты показали, что трубка, наполненная водой, существенно мягче, чем «сухая» трубка – трубка без наполнителя, а трубки, наполненные теллуром или ртутью, несколько жестче, чем «сухие» трубки. В работе [3] проведено сравнение экспериментальных данных с результатами моделирования, когда прогиб нанотрубки определяется как прогиб трансверсально-изотропной балки по теории Тимошенко–Рейсснера (ТР). Слоистая структура асбестовых нанотрубок позволяет рассматривать ее как трансверсально-изотропную, каждый слой может не менять свои свойства, но модуль сдвига в поперечном сечении G' может существенно меняться в зависимости от наполнителя. То, что трубка, наполненная водой, оказывается мягче, чем «сухая» трубка, может быть объяснено уменьшением модуля сдвига в поперечном сечении. В изотропном случае теория ТР, учитывающая сдвиг, несущественно уточняет классическую теорию, но для тел из трансверсально-изотропного материала «при умеренно малой поперечной жесткости на сдвиг» теория ТР существенно уточняет теорию Бернулли–Кирхгоффа–Лява и дает следующее асимптотическое приближение трехмерной теории [5].

Ниже деформация многослойной трубки, находящейся под действием локально приложенной нагрузки определяется по теории анизотропных оболочек Родионовой–Титасева–Черныха (РТЧ) [6] и по теории анизотропных оболочек средней толщины О.М. Паля и В.Е. Спиро (ПС) [7], позволяющих учесть слоистую структуру асбеста и цилиндрическую В заключении проводится сравнение результатов, полученных по теории ТР, РТЧ, ПС, с результатами, получающимися при тех же параметрах МКЭ в

пакете ANSYS 11.

1. Постановка задачи. В первом приближении для аналитической оценки прогибов нанотрубок, как балок, использовалась теория Тимошенко–Рейсснера (ТР) [9], так как длина асбестовых нанотрубок во много раз превосходит поперечные размеры сечения. Прогиб шарнирно закрепленной по краям балки длиной L , находящейся под действием точечной силы F , приложенной в точке L_v , имеет следующий вид:

$$w(L_v) = \frac{FL_v^2(L-L_v)^2}{3LEJ} \left(1 + \frac{1}{G'S} \frac{3EnJ}{L_v(L-L_v)} \right) \quad (1)$$

Здесь $J = \pi R^4/4$ – момент инерции цилиндрического сечения, E – модуль Юнга, $\nu = 5/6$ коэффициент в формуле Журавского, $S = \pi R^2$ – площадь поперечного сечения.

В дальнейшем трубка рассматривается как многослойная замкнутая и шарнирно опертая по краям анизотропная цилиндрическая оболочка, находящаяся под действием локальной области давления (рис. 1).

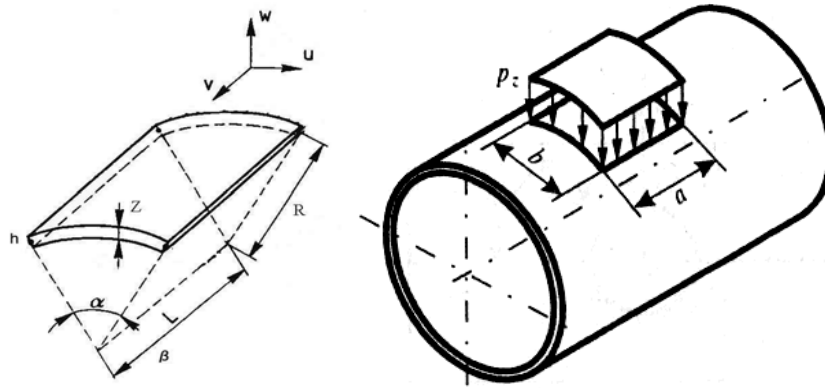


Рис.1. Область нагружения на поверхности трубки..

Пусть α и β – цилиндрические координаты на поверхности оболочки: α – полярный угол, β – координата вдоль образующей трубки, h^i – толщины, R^i – радиусы срединных поверхностей слоев оболочки, а L – длина трубки.

Для определения коэффициентов используем обозначение A_j^i . Нижний индекс j указывает, какой криволинейной координате соответствует рассматриваемая величина A , а верхний i – к какому слою она относится, так $i=1$ соответствует внутренней оболочке, $i = N$ последней – внешней. E_1^i, E_2^i, E_3^i – модули упругости в тангенциальном и нормальном координатных направлениях, ν_{jk}^i – коэффициенты Пуассона.

Определим напряженно-деформированное состояние многослойной

трубки, находящейся под действием локально приложенной нагрузки, с использованием новых уточненных теорий анизотропных оболочек.

Теория анизотропных оболочек Родионовой–Титаева–Черныха – это линейная теория однородных анизотропных оболочек постоянной толщины [6]. Функции, описывающие перемещение слоя оболочки $u_1(\alpha, \beta, z)$, $u_2(\alpha, \beta, z)$, $u_3(\alpha, \beta, z)$ по теории Родионовой–Черныха предлагается искать в виде рядов по первым четырем полиномам Лежандра P_0, P_1, P_2, P_3 от нормальной координаты $z \in [-h/2, h/2]$

$$\begin{aligned} u_j &= (u, v)P_0(z) + \gamma_j P_1(z) + \theta_j P_2(z) + \varphi_j P_3(z); \\ u_3 &= wP_0(z) + \gamma_3 P_1(z) + \theta_3 P_2(z); \quad (j = 1, 2) \end{aligned} \quad (2)$$

$$P_0(z) = 1, \quad P_1(z) = \frac{2z}{h}, \quad P_2(z) = \frac{6z^2}{h^2} - \frac{1}{2}, \quad P_3(z) = \frac{20z^3}{h^3} - \frac{3z}{h} \quad (3)$$

где u, v, w – компоненты вектора перемещения точек срединной поверхности оболочки, а γ_3 и θ_3 характеризуют изменение длины нормали к этой поверхности, γ_1 и γ_2 – углы поворота нормали в плоскостях (α, z) и (β, z) соответственно. Величины θ_1 и φ_1 , описывают нормальную кривизну в плоскости (α, z) волокна, а θ_2 и φ_2 , описывают нормальную кривизну в плоскости (β, z) , которые до деформации были перпендикулярными к срединной поверхности оболочки.

Теория оболочек Паляя–Спиро – это теория оболочек средней толщины, в которой приняты следующие гипотезы [7]:

1) прямолинейные волокна оболочки, перпендикулярные к ее срединной поверхности до деформации, остаются после деформации также прямолинейными;

2) косинус угла наклона оболочки таких волокон к срединной поверхности деформированной оболочки равен осредненному углу поперечного сдвига.

Математическая формулировка принятых гипотез сводится к следующим равенствам:

$$\begin{aligned} u_1 &= u + \varphi \cdot z \quad u_2 = v + \psi \cdot z \quad u_3 = w + F(\alpha, \beta, z) \\ \varphi &= \gamma_1 + \varphi_0, \quad \psi = \gamma_2 + \psi_0, \quad \varphi_0 = -\frac{1}{A_1} \frac{\partial w}{\partial \alpha} + k_1 u \quad \psi_0 = -\frac{1}{A_1} \frac{\partial w}{\partial \beta} + k_2 v \end{aligned} \quad (4)$$

где φ и ψ углы поворота нормали в плоскостях (α, z) и (β, z) ; $\varphi_0, \psi_0, \gamma_1$ и γ_2 – углы поворота нормали к срединной поверхности и углы сдвига в тех же плоскостях. Функция $F(\alpha, \beta, z)$ характеризует изменение длины нормали к срединной поверхности.

Коэффициенты Ламэ и кривизны, определяющие геометрию цилиндрической оболочки, имеют вид:

$$A_1^i = R^i, \quad A_2^i = 1, \quad k_1^i = 1/R^i, \quad k_2^i = 0. \quad (5)$$

Приведем основные величины к безразмерному виду по следующим формулам:

$$\begin{aligned} \{\tilde{u}^i, \tilde{v}^i, \tilde{w}^i, \tilde{\gamma}_j^i, \tilde{\theta}_j^i, \tilde{\varphi}_k^i, \tilde{\phi}_0^i, \tilde{\psi}_0^i\} &= \frac{1}{h} \{u^i, v^i, w^i, \gamma_j^i, \theta_j^i, \varphi_k^i, \phi_0^i, \psi_0^i\} \\ \{\tilde{E}_{k+1}\} &= \frac{1}{E_1} \{E_{k+1}\}, \quad \{\tilde{G}_{13}, \tilde{G}_{12}, \tilde{G}_{23}\} = \frac{1}{E_1} \{G_{13}, G_{12}, G_{23}\}, \\ \{\tilde{P}_j^{-(i)}, \tilde{P}_j^{+(i)}\} &= \frac{1}{E_1} \{P_j^{-(i)}, P_j^{+(i)}\}, \quad (j=1,2,3) \quad (k=1,2) \\ \{\tilde{T}_{j-1}^i, \tilde{Q}_k^i\} &= \frac{\{T_{j-1}^i, Q_k^i\}}{R^i E_1}, \quad \{\tilde{M}_{j-1}^i\} = \frac{\{M_{j-1}^i\}}{R^i E_1 h}, \quad \tilde{R}^i = \frac{A_1^i}{A_2^i}, \quad \tilde{h}^i = \frac{h}{R^i} \end{aligned} \quad (6)$$

где P_j и P_j^+ – давление на внутренней и внешней поверхностях оболочки.
Для удобства введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} E_{11} &= \frac{1}{1-\nu_{12}\nu_{21}}, \quad E_{12} = E_{21} = \frac{\tilde{E}_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}}, \quad E_{22} = \frac{\nu_{12}}{1-\nu_{12}\nu_{21}}, \\ E_z &= \frac{\tilde{E}_3}{1-\nu_{13}\mu_1 - \nu_{23}\mu_2}, \quad \mu_1 = \frac{\nu_{31} + \nu_{21}\nu_{32}}{1-\nu_{12}\nu_{21}}, \quad \mu_2 = \frac{\nu_{32} + \nu_{21}\nu_{31}}{1-\nu_{12}\nu_{21}}, \\ K_{11} &= -E_{11}\tilde{h}^i, \quad K_{12} = E_{22}\tilde{h}^i, \quad K_{21} = \frac{3}{2}E_{11}\tilde{h}^i\mu_1, \quad K_{22} = \frac{3}{2}E_{22}\tilde{h}^i\mu_2, \\ K_{13} &= E_{11}\frac{\tilde{h}^i}{2}(\mu_2 + 2\nu_{12}\mu_1), \quad K_{23} = E_{11}\frac{\tilde{h}^i}{2}(\nu_{12}\mu_1 + 2\mu_2), \\ \tilde{m}_j^i &= \frac{\tilde{h}^i}{2}P_j^{+(i)}\left(1 + \frac{\tilde{h}^i}{2}\right) + \frac{\tilde{h}^i}{2}P_j^{-(i)}\left(1 - \frac{\tilde{h}^i}{2}\right) \\ \tilde{q}_j^i &= P_j^{+(i)}\left(1 + \frac{\tilde{h}^i}{2}\right) - P_j^{-(i)}\left(1 - \frac{\tilde{h}^i}{2}\right), \quad (j=1,2,3) \end{aligned} \quad (7)$$

2. Соотношения теории оболочек. Деформации оболочки для рассматриваемых теорий выражаются через компоненты перемещения по следующим формулам:

Теория Р - Т - Ч	Теория П - С
$\tilde{\varepsilon}_1^i = \tilde{h}^i \left(\frac{\partial \tilde{u}^i}{\partial \alpha^i} + \tilde{w}^i \right), \tilde{\varepsilon}_2^i = \frac{\partial \tilde{v}^i}{\partial \beta^i},$	$\tilde{\varepsilon}_1^i = \tilde{h}^i \left(\frac{\partial \tilde{u}^i}{\partial \alpha^i} + \tilde{w}^i \right), \tilde{\varepsilon}_2^i = \frac{\partial \tilde{v}^i}{\partial \beta^i}$
$\tilde{\eta}_1^i = \tilde{h}^i \left(\frac{\partial \tilde{\gamma}_1^i}{\partial \alpha^i} + \tilde{\gamma}_3^i \right), \tilde{\eta}_2^i = \frac{\partial \tilde{\gamma}_2^i}{\partial \beta^i}$	$\eta_1^i = \tilde{h}^i \left(\frac{\partial \tilde{\phi}^i}{\partial \alpha^i} + \tilde{\gamma}_3^i \right), \eta_2^i = \frac{\partial \tilde{\psi}^i}{\partial \beta^i}$
$\tilde{\varepsilon}_{13}^i = \tilde{h}^i \frac{\partial \tilde{w}^i}{\partial \alpha^i} - \tilde{h}^i \tilde{u}^i + 2\tilde{\gamma}_1^i$	$\tilde{\varepsilon}_{13}^i = 0$
$\tilde{\varepsilon}_{23}^i = \frac{\partial \tilde{w}^i}{\partial \beta^i} + 2\tilde{\gamma}_2^i$	$\tilde{\varepsilon}_{23}^i = 0$
$\tilde{\omega}_1^i = \tilde{h}^i \frac{\partial \tilde{v}^i}{\partial \alpha^i}, \tilde{\omega}_2^i = \frac{\partial \tilde{u}^i}{\partial \beta^i},$	$\tilde{\omega}_1^i = \tilde{h}^i \frac{\partial \tilde{v}^i}{\partial \alpha^i}, \tilde{\omega}_2^i = \frac{\partial \tilde{u}^i}{\partial \beta^i},$
$\tilde{\tau}_1^i = \tilde{h}^i \frac{\partial \tilde{\gamma}_2^i}{\partial \alpha^i}, \tilde{\tau}_2^i = \frac{\partial \tilde{\gamma}_1^i}{\partial \beta^i},$	$\tilde{\tau}_1^i = \tilde{h}^i \frac{\partial \tilde{\psi}^i}{\partial \alpha^i}, \tilde{\tau}_2^i = \frac{\partial \tilde{\phi}^i}{\partial \beta^i},$
$\tilde{\tau}^i = \tilde{\tau}_1^i + \tilde{\tau}_2^i \quad \tilde{\omega} = \tilde{\omega}_1^i + \tilde{\omega}_2^i$	

(8)

Подчеркиванием выделены отличающиеся для рассматриваемых теорий компоненты деформаций.

$$\begin{aligned}
\tilde{T}_j^i &= \tilde{h}^i (E_{1j} \tilde{\varepsilon}_1^i + E_{2j} \tilde{\varepsilon}_2^i) + \mu_j^i T_0^i, \tilde{M}_j^i = \frac{\tilde{h}^i}{6} (E_{1j} \tilde{\eta}_1^i + E_{2j} \tilde{\eta}_2^i) + \mu_j^i M_0^i, \\
\tilde{T}_{12}^i &= \tilde{T}_{21}^i = \tilde{G}_{12}^i \tilde{h}^i \tilde{\tau}^i, \quad \tilde{M}_{12}^i = \tilde{M}_{21}^i = \tilde{G}_{12}^i \tilde{h}^i \tilde{\omega}^i / 6, \\
\tilde{Q}_j^i &= \frac{5\tilde{h}^i \tilde{G}_{j3}^i}{6} \tilde{\varepsilon}_j^i + \frac{\tilde{m}_j^i}{6} - (\tilde{h}^i)^2 \frac{\tilde{G}_{j3}^i}{6} \frac{\partial \tilde{\theta}_3^i}{\partial \alpha^i}, \\
\tilde{T}_0^i &= \tilde{m}_3^i + \frac{(\tilde{h}^i)^2}{12} \left(\frac{\partial q_1^i}{\partial \alpha^i} + \tilde{R}^i \frac{\partial q_2^i}{\partial \beta} \right) - \tilde{h}^i \tilde{M}_1^i \\
\tilde{M}_0^i &= \frac{(\tilde{h}^i)^2}{10} \partial q_3^i + \frac{\tilde{h}^i}{60} \left(\frac{\partial m_1^i}{\partial \alpha^i} + \tilde{R}^i \frac{\partial m_2^i}{\partial \beta} \right) - \frac{\tilde{h}^i}{60} \tilde{T}_1^i
\end{aligned}$$

(9)

Подставляя приведенные в (8) зависимости, в соотношения связи моментов и усилий с компонентами деформаций (9), можно получить уравнение связи усилий и моментов с компонентами перемещений.

$$\begin{aligned}
\tilde{\theta}_1^i &= \frac{\tilde{q}_1^i}{12\tilde{G}_{13}} - \frac{\tilde{h}^i}{6} \frac{\partial \tilde{\gamma}_3^i}{\partial \alpha^i}, & \tilde{\theta}_2^i &= \frac{\tilde{q}_2}{12\tilde{G}_{23}} - \frac{\tilde{h}^i}{6\tilde{R}^i} \frac{\partial \tilde{\gamma}_3^i}{\partial \beta^i} \\
\tilde{\varphi}_1^i &= \frac{\tilde{m}_1^i - \tilde{Q}_1^i}{10\tilde{h}^i \tilde{G}_{13}} - \frac{\tilde{h}^i}{10} \frac{\partial \tilde{\theta}_3^i}{\partial \alpha^i}, & \tilde{\varphi}_2^i &= \frac{\tilde{m}_2^i - \tilde{Q}_2^i}{10\tilde{h}^i \tilde{G}_{23}} - \frac{\tilde{h}^i}{10\tilde{R}^i} \frac{\partial \tilde{\theta}_3^i}{\partial \beta^i} \\
\tilde{\gamma}_3^i &= \frac{1}{2\tilde{h}^i} \frac{\tilde{T}_0^i}{\tilde{E}_z^i} - \frac{1}{2} (\mu_1 \tilde{\varepsilon}_1^i + \mu_2 \tilde{\varepsilon}_2^i), & \tilde{\theta}_3^i &= \frac{1}{\tilde{h}^i} \frac{\tilde{M}_0^i}{\tilde{E}_z^i} - \frac{1}{6} (\mu_1 \tilde{\eta}_1^i + \mu_2 \tilde{\eta}_2^i),
\end{aligned} \tag{10}$$

В преобразованные выражения (9) подставим соотношения (10) для шести компонентов смещения. Таким образом, выражения для усилий и моментов будут сведены в зависимость от пяти основных компонентов смещения u, v, w, γ_1 и γ_2 :

Проведем подобное преобразование для теории Паляя–Спиро. Уравнения связи деформаций с усилиями и моментами для данной теории имеют вид.

$$\begin{aligned}
\tilde{T}_j^i &= \tilde{h}^i \left(E_{1j} \tilde{\varepsilon}_1^i + E_{2j} \tilde{\varepsilon}_2^i \right) + \frac{\tilde{h}^i}{12} \left((K_{j1} - K_{j2}) \tilde{\eta}_1^i - K_{j3} \tilde{\eta}_2^i \right) + \mu_j^i \frac{\tilde{q}_3^i}{2} \tilde{h}^i, \\
\tilde{M}_j^i &= \frac{\tilde{h}^i}{6} \left(E_{1j} \tilde{\eta}_1^i + E_{2j} \tilde{\eta}_2^i + (K_{j1} - K_{j2}) \tilde{\varepsilon}_j^i - K_{3-j} \tilde{\varepsilon}_{-j}^i \right) + \mu_j^i \frac{\tilde{q}_3^i}{8} \tilde{h}^i, \\
\tilde{T}_{(12,21)}^i &= \tilde{G}_{12}^i \tilde{h}^i \left(\tilde{\omega}^i - (\tilde{h}^i)^2 \tilde{\tau}_{(1,2)}^i / 12 \right), & \tilde{M}_{(12,21)}^i &= \frac{\tilde{G}_{12}^i \tilde{h}^i}{12} \left(\tilde{\tau}^i - (\tilde{h}^i)^2 \tilde{\omega}_{(1,2)}^i \right), \\
\sigma_{33} &= \frac{P_3^{+(i)} \left(1 + \tilde{h}^i / 2 \right) \left(1 / 2 + z / \tilde{h}^i \right) - P_3^{-(i)} \left(1 - \tilde{h}^i / 2 \right) \left(1 / 2 - z / \tilde{h}^i \right)}{1 + z / R^i}
\end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned}
F(\alpha, \beta, z) &= \int_0^z \frac{\sigma_{33}}{E_z} dz - \left(\mu_1 \tilde{\varepsilon}_1^i + \mu_2 \tilde{\varepsilon}_2^i \right) z - \left(\mu_1 \left(\tilde{\eta}_1^i - \frac{\tilde{\varepsilon}_1^i}{\tilde{R}^i} \right) + \mu_2 \tilde{\eta}_2^i \right) \frac{z^2}{2} + \\
&+ \left(\frac{\mu_1 \tilde{\eta}_1^i}{\tilde{R}^i} \right) \frac{z^3}{3}, \quad \tilde{Q}_j^i = \tilde{G}_{j3}^i \tilde{h}^i \gamma_j^i, \quad j=1,2
\end{aligned}$$

Подставив в эти соотношения формулы для деформаций (8) так же перейдем к зависимости моментов и усилий от компонентов смещения u, v, w, γ_1 и γ_2

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \tilde{T}_1^i}{\partial \alpha^i} + \tilde{R}^i \frac{\partial \tilde{T}_{21}}{\partial \beta^i} + \tilde{Q}_1^i &= \tilde{q}_1^i, & \frac{\partial \tilde{T}_{12}^i}{\partial \alpha^i} + \tilde{R}^i \frac{\partial \tilde{T}_2}{\partial \beta^i} &= \tilde{q}_2^i, & \frac{\partial \tilde{Q}_1^i}{\partial \alpha^i} + \tilde{R}^i \frac{\partial \tilde{Q}_2}{\partial \beta^i} &= \tilde{q}_3^i, \\
\frac{1}{\tilde{h}^i} \left(\frac{\partial \tilde{M}_1^i}{\partial \alpha^i} + \tilde{R}^i \frac{\partial \tilde{M}_{21}}{\partial \beta^i} \right) - \tilde{Q}_1^i &= \tilde{m}_1^i, & \frac{1}{\tilde{h}^i} \left(\frac{\partial \tilde{M}_{12}^i}{\partial \alpha^i} + \tilde{R}^i \frac{\partial \tilde{M}_2^i}{\partial \beta^i} \right) - \tilde{Q}_2^i &= \tilde{m}_2^i
\end{aligned} \tag{12}$$

Таким образом, для обеих теорий получены уравнения связи усилий и

моментов с компонентами перемещений. Подставляя их в уравнения равновесия цилиндрической оболочки можно получить систему из пяти дифференциальных уравнений в частных производных с пятью неизвестными функциями. Для теории Родионовой–Титаева–Черныха в общем виде система уравнений имеет 14 порядок [7], а для теории Паляя–Спиро – 10 порядок. Подставляя соответствующие компоненты деформации в расчетные формулы (2)–(3), можно получить все составляющие напряженно-деформированного состояния рассматриваемых оболочек.

3. Численный метод. Для решения задачи используем систему уравнений равновесия оболочки в перемещениях (11). Перемещения срединной поверхности оболочки задаются в виде:

$$\begin{aligned} (u^i(\alpha, \beta), \gamma_1^i(\alpha, \beta)) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} (u_{mn}^i, \gamma_{1,mn}^i) \sin(na) \sin(\bar{m}\beta) \\ (v^i(\alpha, \beta), \gamma_2^i(\alpha, \beta)) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} (v_{mn}^i, \gamma_{2,mn}^i) \cos(na) \cos(\bar{m}\beta) \\ w^i(\alpha, \beta) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} w_{mn}^i \cos(na) \sin(\bar{m}\beta) \quad \bar{m} = (\pi m) / L \end{aligned} \quad (13)$$

Эти формулы учитывают симметрию деформации оболочки относительно плоскости $\alpha=0$ и обеспечивают нулевые перемещения u, γ_1 и w при $\beta=0$ и $\beta=L$. Выражения для v и γ_2 не удовлетворяет нулевым краевым условиям, однако, когда деформации не доходят до края участка, эти перемещения малы. Внешние и внутренние силы, действующие на поверхности оболочки, представим в виде произведения разложенных в ряд сил в сечениях. Пусть $X_1^{(i+1)}, X_2^{(i+1)}, X_3^{(i+1)}$ – составляющие давления, возникающего на внешней поверхности i -ой оболочки, а $X_1^{(i)}, X_2^{(i)}, X_3^{(i)}$ – давление на ее внутренней поверхности, индекс $i = 1$ соответствует внутренней, а $i=N+1$ внешней поверхности трубки, состоящей из N слоев. Следуя [7], примем условие жесткого контакта между слоями:

$$\tilde{u}_j^i(\alpha, \beta, h/2) = \tilde{u}_j^{i+1}(\alpha, \beta, -h/2), \quad j = 1, 2, 3 \quad (14)$$

Локализованную на маленькой квадратной области нагрузку представим в виде произведения двух рядов Фурье функций нагружения в продольном и поперечном сечениях:

$$Pa[\alpha] = \left(\frac{C}{L} + \frac{2}{L} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi}{L} C\right) \cos\left(\frac{n\pi}{L} \alpha\right) \right) \quad (15)$$

Давление в продольном сечении трубки будет описываться соотношением:

$$Pb[\beta] = \left(\frac{4}{L} m \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L}{m\pi} \sin\left(\frac{m\pi}{L} C\right) \sin\left(\frac{m\pi}{L} L_v\right) \cos\left(\frac{m\pi}{L} \beta\right) \right) \quad (16)$$

где L_v – центр области приложения нагрузки, $2C$ – длина стороны квадратной области приложения нагрузки, P – давление в области.

Область давления описывается функцией произведения рядов:

$$Pd[\alpha, \beta] = P \cdot Pa[\alpha]Pb[\beta] \quad (17)$$

Нагрузка прикладывается к внешней поверхности трубки:

$$X_{1,2}^{N+1} = 0, \quad X_3^{N+1} = Pd[\alpha, \beta] \quad (18)$$

Расчёты показали, что влияние давления, вызванного наполнителем, на внутренней поверхности трубки пренебрежимо мало, поэтому в дальнейшем оно принимается равным нулю:

$$X_j^1 = 0, \quad j = 1, 2, 3 \quad (19)$$

Подставим зависимости (13), (18) и (19) в систему уравнений равновесия оболочки (12) и в соотношения жесткого защемления слоев (14). В результате получается система из $5N$ алгебраических уравнений относительно компонентов деформаций оболочек

$$F_j(u_{nm}^i, v_{mn}^i, w_{mn}^i, \gamma_{1,mn}^i, \gamma_{2,mn}^i, X_{k,mn}^{i+1}, X_{k,mn}^i) = 0 \quad j = 1, 5; k = 1, 3; \quad (20)$$

и система из $3(N-1)$ уравнений относительно сил взаимодействия между слоями оболочек.

$$\begin{aligned} G_j^{i+1}(u_{mn}^{i+1}, v_{mn}^{i+1}, w_{mn}^{i+1}, \gamma_{1,mn}^{i+1}, \gamma_{2,mn}^{i+1}, X_{j,mn}^{i+2}, X_{j,mn}^{i+1}) = \\ = G_j^i(u_{mn}^i, v_{mn}^i, w_{mn}^i, \gamma_{1,mn}^i, \gamma_{2,mn}^i, X_{j,mn}^{i+1}, X_{j,mn}^i) \quad j = 1, 2, 3 \quad (21) \end{aligned}$$

Каждый из коэффициентов систем будет общим членом ряда Фурье функций деформаций и напряжений. Для реализации приведенного численного метода была разработана программа на основе пакета Mathematica 7.0

4. Результаты расчетов. В качестве примера приведен расчет, выполненный для следующих параметров трубки: внутренний радиус 2.5 нм, внешний $R=16$ нм, длина трубки $L=500$ нм, значения модуля упругости оболочки $E_1=E_2=E_3=1.75 \cdot 10^{11}$ Па, коэффициенты Пуассона $\nu_{ij}=0.3$, где $i, j = (1, 2)$. Примем сравнительно малое значение модуля сдвига $G_{12}=G_{13}=G_{23}=2.3 \cdot 10^7$ Па. Сила внешнего воздействия $Fv=10$ нН, площадь области приложенной нагрузки $[40 \cdot 40]$ нм², L_v — координата приложения силы на внешней поверхности оболочки. Ясно, что соотношение h/R рассматриваемой нанотрубки существенно превосходит область применимости теории оболочек, если рассматривать ее как однослойную. Поэтому для решения поставленной задачи проводится разбиение трубки на n слоев. Расчёты показывают, что при следующем разбиении $n=100$, $h=0.135$ нм значения прогибов оказывается очень близким к результатам, полученным с использованием трехмерной теории. Дальнейшее увеличение числа слоев к уточнению результатов не приводит.

В таблице 1 проводится сравнение результатов, полученных по теории Тимошенко–Рейсснера [TR], Родионовой–Титаева–Черныха [RTCH], Палия–Спиро [PS], с результатами, получающимися при тех же

параметрах МКЭ в пакете ANSYS 11, где был использован 3-х мерный 20 узловой элемент Solid186. Строки «TR1», «Ansys1» соответствуют значениям прогиба трубки с отверстием; строки «TR2», «Ansys2» — прогибу сплошной трубки. Видно, что все теории дают близкие результаты.

Таблица 1. Сравнение величин прогибов многослойной трубки.

Lv	250	200	150	120	100	70	40
TR1	60.61	58.07	50.52	43.65	38.12	28.47	17.24
TR2	59.2	56.72	49.34	42.62	37.22	27.79	16.82
RTCH	57.79	55.21	47.56	40.62	35.07	25.45	14.4
PS	57.54	54.97	47.35	40.45	34.92	25.34	14.34
Ansys1	54.11	51.7	45.1	39.02	34.07	25.37	15.37
Ansys2	52.39	50.12	43.71	37.81	33.02	24.6	14.91

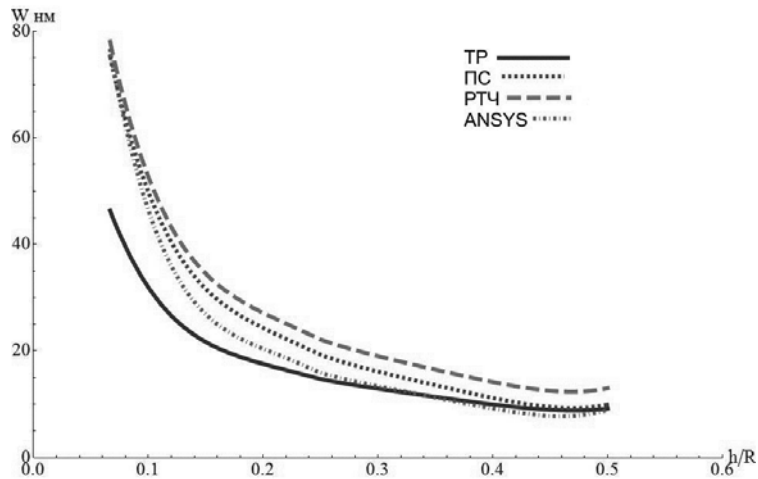


Рис.2. Прогиб трубки в точке приложения нагрузки.

Однако результаты, полученные с использованием теорий оболочек, ближе к результатам трехмерной теории, что может быть объяснено более точным учетом цилиндрической анизотропии, а также области приложения внешней нагрузки.

Проведем также сравнение результатов, полученных по трехмерной теории, используемой в пакете ANSYS 11 с результатами, получающимися по изложенным неклассическим теориям для однослойной цилиндрической оболочки с постоянным внешним радиусом $R=16$ нм и постепенно увеличивающейся толщины оболочки. На (рис. 2) приведен график прогибов в центре рассматриваемых оболочек, внешняя сила $F_v=1$ нН.

Результаты, представленные на (рис. 2), показывают, что обе теории оболочек РТЧ и ПС дают близкие значения прогибов. При увеличении относительной толщины оболочки величины прогиба, получаемые по теории ПС ближе к значениям, получаемым методом конечных элементов. Чем толще становится оболочка, тем лучшие результаты дает теория Тимошенко–Рейсснера.

ЛИТЕРАТУРА

1. Miller R.E., Shenoy V.B. Size-dependent elastic properties of nanosized structural elements // *Nanotechnology*. – 2000. – v. 11. – P. 139–147.
2. Кривцов А.М., Морозов Н.Ф. Аномалии механических характеристик наноразмерных объектов // *Доклады РАН*. – 2001. – т.381, Вып.3 – С.345–347
3. Анкудинов А.В., Бауэр С.М., Каштанова С.В., Морозов Н.Ф., Няпшаев И.А. Исследование механической жесткости уединенных асбестовых нанотрубок. // *Известия высших учебных заведений. Северо–Кавказский регион. Актуальные проблемы механики, Естественные науки*. – 2009. – С.7–9
4. Анкудинов А.В., Бауэр С.М., Ермаков А.М., Каштанова С.В., Морозов Н.Ф. О механических параметрах асбестовых нанотрубок // *Современные проблемы механики сплошной среды. Труды XIV Междунар. конф.* – 2010. – т.1. – с.35–38
5. Товстик П.Е. Об асимптотическом характере приближенных моделей балок, пластин и оболочек // *Вестник Санкт–Петербургского университета. Сер.1.* – 2007. – т. 3. – с.49.
6. Родионова В.А., Титаев Б.Ф., Черных К.Ф. Прикладная теория анизотропных пластин и оболочек. СПб.: Изд–во С.–Петерб. ун–та. – 1996. – 280 с.
7. Палий О.М., Спиро В.Е. Анизотропные оболочки в судостроении. Теория и расчет. Л.: Судостроение. – 1977. – с. 20–32
8. Bauer S.M., Ermakov A.M., Kashtanova S.V., Morozov N.F. Evaluation of the Mechanical Parameters of Multilayered Nanotubes by means of Nonclassical Theories of Shells. EUROMECH Colloquium 527 Shell-like Structures – Nonclassical Theories and Applications 22–26.08.2011, Martin Luther University Halle–Wittenberg, Germany, *Advanced Structured Materials*. – 2011. – Vol.15, Part 6. – P.519–530
9. Donnell L.H. *Beams, Plates and Shells*. McGraw-Hill Book Company. – 1976.