О СТРУКТУРЕ СЛОЕНИЙ КОРАЗМЕРНОСТИ ОДИН НЕОТРИЦАТЕЛЬНОЙ КРИВИЗНЫ.

Болотов Д.В.

Физико-технический институт низких температур НАН Украины

Мы показываем, что трансверсально ориентируемое C^2 – слоение коразмерности один неотрицательной кривизны Риччи на замкнутом ориентируемом римановом многообразии является слоением почти без голономии, что позволяет представить многообразие в виде объединения блоков, где слоение выглядит достаточно просто.

1. Введение. Слоением F класса C^k размерности p многообразия M^n называется разбиение M^n на линейно связные подмножества F_α, называемые слоями, такое, что существует C^k – атлас (U_i, φ_i), где слоение выглядит как поверхности уровня: $x_{p+1} = \text{const}, \ldots, x_n = \text{const}$. Число $q = n - p$ называется коразмерностью слоения.

Слоение F называется *тансверсально ориентируемым*, если ориентируемо фактор – расслоение TM/TF, где TM и TF – касательное расслоение многообразия M и его подрасслоение, касательное слоению F. Если при этом ориентируемо M, то трансверсальная ориентируемость слоения эквивалентна ориентируемости F, то есть ориентируемости расслоения TF.

В данной работе предполагается ориентируемыми как M так и F.

Будем называть слоение F *слоением неотрицательной кривизны*, если все слои в индуцируемой метрике имеют неотрицательную кривизну Риччи.

Замечание 1. *Если риманово многообразие полно, то с индуцированной метрикой слои будут полными римановыми многообразиями.*

Примером слоения неотрицательной кривизны является знаменитое слоение Риба на стандартной трехмерной сфере постоянной кривизны [1]. В [2] классифицированы все замкнутые трехмерные ориентированные многообразия, допускающие трансверсально ориентируемые слоения неотрицательной кривизны.

В [3] доказано, что сферы S^{2n+1} положительной секционной кривизны при $n > 1$ не допускают слоения коразмерности один неотрицательной кривизны, однако до сих пор не ясно, могут ли произвольные римановы многообразия, гомеоморфные $S^{2n+1}, n > 1$ иметь слоение коразмерности один неотрицательной кривизны (даже неотрицательной секционной кривизны). Последний вопрос поставлен в [4].

Цель данной заметки попытаться описать топологическую структуру замкнутых многообразий, допускающих слоения коразмерности один неотрицательной кривизны. А именно, мы покажем, что либо слоение не имеет компактных слоев и многообразие является расслоением над окружностью, либо многообразие можно разбить на блоки, где слоение выглядит достаточно просто.

1.1 Голономия. Ключевым понятием в теории слоений является понятие голономии. Подробное описание группы голономии можно найти в [5].

Пусть s – путь на слое L слоения F коразмерности q многообразия M. Построим вдоль этого пути семейство трансверсальных дисков, которые составляют вложение цилиндра $D^q \times I$ в M. Слои слоения будут высекать на этом цилиндре линии, которые определяют диффеоморфизм окрестности центра одного основания в окрестность центра другого основания. Доказывается, что этот диффеоморфизм не зависит как от гомотопии пути с закрепленными концами. Рассматривая же замкнутые пути, мы получим представление $\Psi : \pi_1(L) \to G_q$ фундаментальной группы слоя L в группе ростков диффеоморфизмов $(D^q, 0) \to (D^q, 0)$. Это представление и называется *голономией*, а его образ – группой голономии слоя L.

Заметим также, что если слоение трансверсально ориентируемо и имеет коразмерность один, то аналогично определяется односторонняя голономия $\Psi^+ : \pi_1(L) \to G_1^+$, принимающая значение в группе ростков диффеоморфизмов в нуле, определенных на полуинтервалах $[0, \varepsilon)$.

Слоение называется *слоением без голономии*, если группа голономии каждого слоя тривиальна. Напомним следующую теорему:

Теорема Новикова [6]. Если C^2 – слоение на компактном многооразии является слоением без голономии, то многообразие является расслоением над окружностью.

Отметим, что частным случаем слоений без голономии являются слоения, заданные замкнутой 1 – формой. Оказывается, что C^2 – слоения почти без голономии сопряжены таким слоениям [7], [8].

Говорят, что слоение является *слоением почти без голономии*, если все некомпактные слои имеют тривиальную голономиию.

Слоения почти без голономии достаточно хорошо изучены. Для дальнейшего нам удобно дать следующее определение:

Скажем, что B является *блоком*, если B – многообразие с краем, которое является *насыщенным множеством*, то есть множеством, состоящим из слоев.

Иманиши доказал серию результатов, которые мы объединим в следующую теорему:

Теорема Иманиши ([10]). *Предположим, что* B – *компактный блок почти без голономии, внутренность которого не содержит компактных* *слоев, тогда все слои внутри блока диффеоморфны типичному слою и* B *может быть двух типов:*

1. B – *плотный блок*, когда каждый типичный слой $L \subset \mathrm{Int}\, B$ плотен в B;

2. B – *собственный блок*, когда каждый типичный слой $L \subset \mathrm{Int}\, B$ является собственным (вложенным подмногообразием) в B. В обоих случаях

$$\mathrm{int}\,\tilde{B} \cong \tilde{L} \times R \tag{1}$$

и следующая последовательность является точной:

$$1 \to \pi_1(L) \to \pi_1(B) \to Z^k \to 0 \tag{2}$$

Более того, блок B собственный тогда и только тогда когда $k = 1$. (Заметим, что из (1) следует, что $k \geq 1$.)

1.2 Минимальные множества. Пружинные слои. С точки зрения динамических систем, слоение является обобщением локально – свободного действия группы Ли на многообразии, в частности, действия группы действительных чисел. Следующее понятие заимствовано из теории гладких динамических систем;

Минимальным множеством в слоеном многообразии называется замкнутое насыщенное множество, не содержащее в себе другого замкнутого насыщенного множества.

Следующая важнейшая теорема, принадлежащая Дж. Планту, описывает минимальные множества слоений коразмерности один, имеющие слои полиномиального роста:

Теорема Планта ([11]). *Если слои* C^2 – *слоения коразмерности один на компактном многообразии имеют менее чем экспоненциальный рост объема шаров, то всякое минимальное множество является, либо всем многообразием, либо компактным слоем*.

Известная теорема Бишопа утверждает, что шар радиуса r в n – мерном многообразии неотрицательной кривизны Риччи имеет полиномиальный рост. Как следствие – слоение неотрицательной кривизны имеет полиномиальный рост слоев и удовлетворяет условиям Теоремы Планта. Это означает, что имеет место

Следствие 1. *Либо все слои слоения неотрицательной кривизны всюду плотны, либо замыкание каждого слоя содержит компактный слой.*

Слой L называется *пружинным*, если он бесконечно наматывается сам на себя. Это означает, что существует замкнутая петля γ на L, такая, что $\Psi^+([\gamma])$ является элементом бесконечного порядка в односторонней группе голономии, который представляется сжимающим отображением $\Gamma^+ : [0,1) \to [0,1)$, и существует значение $x \in (0,1)$, соответствующее слою L.

Оказывается, что пружинный слой имеет экспоненциальный рост (см. [9]).

Следствие 2. Слоение неотрицательной кривизны не имеет пружинных слоев.

1.3 Поведение слоения в окрестности слоя. Напомним теорему, принадлежащую Дж. Планту и У. Терстону.

Теорема Планта – Терстона ([12]). *Если группа голономии слоя трансверсально ориентируемого* C^2 – *слоения имеет полиномиальный рост, то она является свободной абелевой.*

Нисимори доказал следующую важную теорему, описывающую поведение слоения в окрестности компактного слоя с абелевой голономией.

Теорема Нисимори ([13]). Пусть F трансверсально ориентируемое C^r слоение на ориентируемом C^r многообразии M и F_0 – компактный слой F. Предположим, что $2 \le r \le \infty$. Пусть T трубчатая окрестность F_0 и U_+ есть объединение F_0 и связной компоненты $T \setminus F_0$. Определим через $\Phi_+(F_0)$ группу односторонней голономии F_0, которая определяется ограничением слоения $F | U_+$. Предположим, что $\Phi_+(F_0)$ является абелевой группой, тогда имеет место лишь одна из следующих возможностей.

(1) Для всех окрестностей V слоя F_0 ограничение слоения $F | V \cap U_+$ имеет компактный слой отличный от F_0.

(2) Существует окрестность V слоя F_0 такая, что все слои $F | V \cap U_+$ за исключением F_0 плотны в $V \cap U_+$. В этом случае $\Phi_+(F_0)$ является свободной абелевой группой ранга ≥ 2.

(3) Существует окрестность V слоя F_0 и связное, коразмерности один, ориентируемое подмногообразие N в F_0, обладающее следующими свойствами. Определим через F_* компактное многообразие с границей, полученное вклейкой двух копий N_1 и N_2 многообразия N в $F_0 \setminus N$, так что $\partial F_* = N_1 \cup N_2$. Пусть $f : [0, \varepsilon) \to [0, \delta)$ сжимающий C^r диффеоморфизм такой что $f(0) = 0$. Обозначим через X_f фактор–многообразие, полученное из $F_* \times [0, \varepsilon)$ отождествлением $(x, t) \in N_1 \times [0, \varepsilon)$ и $(x, f(x)) \in N_2 \times [0, \delta)$. Мы имеем слоение F_f на X_f, где слои состоят из семейства множеств $F_* \times \{t_i\}, t_i \in [0, \varepsilon)$. Тогда для некоторого f, описанного выше, существует C^r диффеоморфизм $h : V \cap U_+ \to X_f$, который отображает каждый слой $F | V \cap U_+$ на некоторый слой F_f. $F | V \cap U_+$ однозначно определяет гомологический класс $[N] \in H_{n-2}(F_0^{n-1}, Z)$, а росток в 0 отображения f однозначен с точностью до сопряженности. В этом случае $\Phi_+(F_0)$ является бесконечной циклической группой.

Замечание 2. Нетрудно видеть, что разным слоям $F|V \cap U_+$, принадлежащим одному слою L соответствуют разные концы слоя L.

1.4 Многообразия неотрицательной кривизны. Топология и геометрия полных многообразий неотрицательной кривизны хорошо известна благодаря замечательным работам Топоногова, Чигера, Громола, Маренича, Перельмана, Вальшапа. Мы приведем здесь некоторые важные результаты, используемые в данной работе.

Напомним теорему о расщеплении Топоногова–Чигера–Громола полных многообразий неотрицательной кривизны Риччи:

Теорема 1. [14], [15] *Пусть* M – *полное многообразие неотрицательной кривизны Риччи. Тогда*

• M изометрично $\bar{M} \times E^k$, где $\bar{M}$ не содержит прямых.

• M имеет максимум два конца, причем в случае двух концов M изометрично $\overset{o}{M} \times E^1$, где $\overset{o}{M}$ компактно.

• Если M – компактно, то универсальное накрытие $\tilde{M}$ изометрично $\overset{o}{M} \times E^k$, где $\overset{o}{M}$ компактно и односвязно.

Топологическая структура полных некомпактных многообразий неотрицательной секционной кривизны описывается следующей известной теоремой:

Теорема 2. [16] Полное открытое многообразие M неотрицательной секционной кривизны диффеоморфно нормальному расслоению $\nu(S)$ компактного вполне выпуклого, вполне геодезического подмногообразия S в M. Подмногообразие S называется душой многообразия M.

2 Слоения неотрицательной кривизны. Основным наблюдением данной работы является следующий результат:

Утверждение 1 *Пусть* F – C^2 – *слоение неотрицательной кривизны на* M*, где* F *и* M – *ориентируемы. Тогда* F – *слоение почти без голономии.*

В [17] доказывается, что фундаментальная группа полного многообразия неотрицательной кривизны Риччи имеет полиномиальный рост. Поэтому группа голономии любого слоя слоения неотрицательной кривизны так же имеет полиномиальный рост, и по теореме Планта – Терстона каждый компактный слой имеет абелеву голономию. Поэтому применима теорема Нисимори. Предположим, что существует некомпактный слой L с нетривиальной голономией. Из ориентируемости слоения следует, что голономия должна быть бесконечной. Пусть γ – замкнутый путь в L, представляющий элемент фундаментальной группы $\pi_1(L)$ на котором голономия нетривиальна.

Случай 1. Элемент $\Psi^+([\gamma])$ односторонней голономии нетривиален, и в полуинтервале $[0,\varepsilon)$ нет неподвижных точек отображения голономии $\Gamma:[0,\varepsilon) \to [0,\varepsilon')$ для некоторого ε.

В этом случае один из элементов $\Psi^{+}(\pm[\gamma])$ представляется сжимающим отображением. Если L является локально плотным, то очевидно, он является пружинным, что противоречит следствию 2. В противном случае на L наматывается другой некомпактный слой P и, согласно следствию 1, существует компактный слой $K \subset \overline{L} \cap \overline{P}$, удовлетворяющий пункту 3 теоремы Нисимори. Отсюда следует, что слой P должен иметь бесконечное число концов, чего не может быть согласно Теореме 1 и Замечанию 2.

Случай 2. Предположим, что полуинтервале $[0,\varepsilon)$ имеется сходящаяся к нулю последовательность неподвижных точек $\{F_i\}$ отображения Γ. Тогда, учитывая, что $\{F_i\} \cap [0, F_k]$ – замкнуто в $[0,\varepsilon)$, где $F_k \in \{F_i\} \cap [0,\varepsilon)$, либо голонимия L должна быть тривиальна, либо мы найдем полуинтервал $[a,\delta) \subset [0,\varepsilon)$ на котором Γ действует сжимающим отображением. Поэтому слой L' соответствующий точке $a \in [0,\varepsilon)$ имеет сжимающее отображение голономии на $\gamma' \subset L'$, где γ' – замкнутый путь, соответствующий неподвижной точке a отображения голономии Γ. Так как множество компактных слоев является компактным (см. [5]), а значит замкнутым подмножеством в M и M – нормальное топологическое пространство, то ε мы можем выбрать сколь угодно малым, чтобы утверждать, что слой L' – некомпактен. Таким образом, мы приходим к уже рассмотренному Случаю 1, что приводит к доказательству теоремы.

Очевидно, что слоение неотрицательной кривизны в теореме можно ослабить и потребовать, чтобы слои имели полиномиальный рост и конечное число концов.

Следствием теоремы Иманиши является следующая теорема, которая описывает топологическую структуру блоков, оснащенных слоениями неотрицательной секционной кривизны:

Утверждение 2. *Пусть B – блок без внутренних компактных слоев, оснащенный слоением неотрицательной секционной кривизны. Тогда граница ∂B имеет не более двух компонент связности.*

Рассмотрим спектральную последовательность регулярного Z^k – накрытия $p: \overline{B} \to B$ с коэффициентами в Z, соответствующую точной последовательности (2). Так как $\operatorname{int} \tilde{B} \cong \tilde{L} \times R$, то $\pi_i(B) \cong \pi_i(\overline{B}) \cong \pi_i(\tilde{B}) \cong \pi_i(L)$ при $i \geq 2$. Но $\pi_1(\overline{B}) \cong \pi_1(L)$. Поэтому $\overline{B}$ гомотопически эквивалентно типичному слою L, который в свою очередь гомотопически эквивалентен своей душе S. Предположим, что $\dim S = 1$. Член E_2^{pq} спектральной последовательности имеет вид:

$$E_2^{pq} = H^p(Z^k; H^q(S, Z))$$

Отметим, что коэффициенты предполагаются локальными, то есть учитывается действие Z^k на $H^q(S,Z)$. Заметим, что $E_2^{pq}=0$, если $p+q>k+1$, и $E_2^{kl}\cong E_\infty^{kl}\cong H^k(Z^k;H^l(S,Z))\cong H^{k+l}(B)$. Это означает, что $H^r(B)=0$, если $r>k+l$ и $H^{k+l}(B)$ равно либо Z, либо Z_2. Заметим, что если многообразие предполагается n – мерным, то $k+l\le n-1$. Это следует из того, что B является n – мерным многообразием с краем и поэтому стягивается по себе на $n-1$ – мерный остов. Из двойственности Пуанкаре следует, что $H^{n-1}(B)\cong H_1(B,\partial B)$. Рассмотрим фрагмент точной последовательности пары:

$$H_1(B,\partial B)\to H_0(\partial B)\to H_0(B)\to 0.$$

Из сказанного выше следует, что $H_1(B,\partial B)$ это одна из групп Z, Z_2 или 0. А так как B – связно, то $H_0(B)=Z$. Поэтому группа $H_0(\partial B)$, будучи ненулевой свободной абелевой группой, равна Z или Z^2. Осталось вспомнить, что число связных компонент клеточного пространства X совпадает с $\dim H_0(X)$. Теорема доказана.

Резюмируем все сказанное следующей теоремой:

Теорема. *Пусть* F *трансверсально ориентируемое слоение коразмерности один неотрицательной кривизны на замкнутом ориентируемомом римановом многообразии* M. *Тогда выполнена одна из следующих возможностей:*

1. Все слои всюду плотны и M *является расслоением над* S^1.

2. F *содержит компактный слой и* M *можно разбить конечным числом компактных слоев на блоки одного из следующих типов:*

А) Исключительный блок: B *гомеоморфен* $L\times I$, *где* L *является компактным слоем гиперслоения и слой* $L\times 0$ *является предельным для множества компактных слоев;*

Б) Плотный блок;

С) Собственный блок.

Фундаментальная группа блоков описывается групповым расширением (2).

Если более того, F – *слоение неотрицательной секционной кривизны, то граница каждого блока имеет максимум две компоненты связности.*

Доказательство. Пункт 1 следует из Утверждения 1, Теоремы Новикова. Пункт 2 теоремы является непосредственным следствием Утверждений 1 и 2, Теоремы Иманиши и того факта, что множество компактных слоев, как отмечалось ранее, является замкнутым в M.

ЛИТЕРАТУРА

1. Reeb G. Sur certaines proprietes toplogiques des varietes feuilletees. 1183. Paris: Hermann. 1952.

2. Болотов Д.В. Слоения неотрицательной кривизны на замкнутых трехмерных многообразиях. // Мат. Сб. – 2009. – т.200. – С. 3– 16.

3. Болотов Д.В. Гиперслоения неотрицательной кривизны Риччи. // Успехи математических наук. – 2000. – т.55. – С. 333– 334.

4. Stuck G. Un analogoue feuillete du theoreme de Cartan– Hadamard. // C.R. Acad. Sci. Paris. – 1991. v.313. – C. 519– 522.

5. Топология слоений / Под. ред. И. Тамура. – М.: Мир, 1979. – 318 с.

6. Новиков С. П. Топология слоений. // Тр. Моск. мат. о– ва. – 1965. – т.14. – С. 249– 278

7. Sacksteder R. Foliations and pseudo– groups. // Amer.J.Math. – 1965. v.87. – P. 79 – 102.

8. Tishler D. On fibering certain foliated manifolds over S^1. // Topology. – 1970. – v.9. – C. 153– 154.

9. Hector G., Hirsch U. Introduction to the geometry of foliations, Part A, Friedr. Vieweg and Sohn, Braunschweig Wiesbaden. – 1983.

10. Imanishi H. Structure of codimension one foliations which are almost without holonomy // J. Math. Kyoto Univ. – 1976. – v.16, № 1. – P. 93– 99.

11. Plante J.F. On the existence of exceptional minimal sets in foliations of codimension one. // J. Different. Equat. – 1974. – v.15. – P. 178– 194.

12. Plante J., Thurston W. Polinomial growth in holonomy groups of foliations. // Comment. math. Helvetici. – 1976. – v.51. – P. 567– 584.

13. Nishimori T. Compact leaves with abelian holonomy. // Tohoku Math. Journ. – 1975. – v.27. – P. 259– 272.

14. Топоногов В.А. Метрическое строение римановых пространств неотрицательной кривизны, содержащих прямую. // Сиб. мат. журн. – 1964 – т.5, № 6. – С. 1358 – 1369.

15. Cheeger J., Gromoll D. On structure of complete manifolds of nonnegative curvature. // Ann. Math. – 1972. – v.96. – P. 413– 443.

16. Cheeger J., Gromoll D. The splitting theorem for manifolds of nonnegative Ricci curvature. // J. Differential Geom. – 1971. – v.6. – P. 119– 128.

17. Milnor J. A Note on Curvature and Fundamental Group, // J. Differential Geometry. – 1968. – № 2. – C. 1– 7.