ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ В МЕХАНИКЕ

Ватульян А. О.

Южный федеральный университет, г. Ростов-на-Дону, Россия

Обратные задачи (ОЗ) в современных моделях естествознания представляют собой новую интенсивно развивающуюся область математического моделирования. При этом успешное исследование ОЗ требует сочетания тонких аналитических методов и оценок, связанных с формулировкой условий единственности и вычислительных приемов, основанных на регуляризованных способах построения численных решений.

Немного об ОЗ в целом. Если анализировать все задачи математического моделирования с точки зрения соотношения «причина–следствие», то их можно разбить на два больших класса: прямые и обратные.

К прямым задачам относятся такие, где по причинам требуется определить следствия. В качестве причин могут фигурировать начальные условия, коэффициенты дифференциальных операторов, граничные условия (нагрузки), геометрия области. В качестве следствий в механике обычно используются компоненты физических полей (перемещения, скорости, ускорения, напряжения, деформации, температура, электрический потенциал). Прямые задачи составляют основу современной математической физики, модели которой строились и изучались на протяжении достаточно большого промежутка времени (основы динамики материальной точки и твердого тела, гидромеханика, теория упругости, модели теплопроводности и электродинамики). Для таких задач детально разработаны методы решения, доказаны теоремы существования и единственности, созданы современные вычислительные технологии, позволяющие находить следствия (компоненты физических полей) с достаточной степенью точности.

Для ОЗ ситуация противоположная: известны следствия, требуется определить причины по некоторой дополнительной информации об исследуемом объекте. Эти задачи систематически стали предметом исследований в математике относительно недавно, первые работы в этом направлении относятся к началу 20 века (ОЗ теории потенциала), а более интенсивно разработки в этой области математического моделирования начали проводиться в 70–80 годах прошлого века [1,9,11]. В настоящее время интерес к этой области математики неуклонно растет, что связано как с потребностями моделирования различных процессов в разных областях не только естественных наук, но, в последние годы, и в новых разделах общественных наук. Это приводит к большому разнообразию формулировок, к созданию и совершенствованию математического аппарата, требуемого при исследовании этих задач. Отметим попутно, что аналитические методы решения ОЗ приводят к успеху весьма редко;

примером успешного аналитического решения ОЗ в механике является задача Ньютона об определении закона изменения силы на основании законов Кеплера и формулировка закона всемирного тяготения [11]. Трудность исследования ОЗ обусловлена в основном тремя факторами: нелинейностью ОЗ (как правило, и при линейности оператора прямой задачи), часто неединственностью при восстановлении причин, их некорректностью и невозможностью непосредственного использования того арсенала вычислительных средств, которые используются при решении прямых задач (методы конечных и граничных элементов, разностные методы). В первую очередь, это проявляется в своеобразной неустойчивости восстановления причин по отношению к погрешности входной информации. Ключевым моментом в исследовании ОЗ является построение связей между входом и выходом моделируемого объекта, что приводит к операторным уравнениям с компактными операторами, при обращении которых необходимо использовать регуляризацию (или видоизменение постановки) в той или иной форме. К сожалению, не всегда удается напрямую связать искомые и заданные функции; очень часто в формулировку операторных соотношений входят вспомогательные (промежуточные) функции, что осложняет процедуру построения решения.

Сформулируем несколько основных направлений в механике в целом, связанных с решением ОЗ [1,9,14,26,27,28]. В первую очередь отметим ряд проблем в рамках моделей теоретической механики, носящих собирательное название «Обратные задачи динамики» [11]. Здесь речь идет об определении сил, под действием которых тело или материальная точка осуществляют заданное движение (задача Бертрана, задача Суслова, задача Мещерского). Проблемы такого типа приводят к ОЗ для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, в первую очередь к задачам об определении правых частей этих уравнений по известным (заданным) законам движения. Задачи такого типа решены достаточно давно.

Во-вторых, это многочисленные задачи в рамках моделей механики деформируемого твердого тела. Здесь можно отметить целый ряд проблем, использующих как стационарные, так нестационарные постановки. В первую очередь, это касается вопросов идентификации свойств новых материалов (композитов, полимеров, керамик), разномодульных, пьезоактивных и пористых сред, материалов с памятью формы, а также нагрузок, действующих на тело. При этом считается известной дополнительная информация об амплитудно-частотных характеристиках поля смещений на поверхности тела. [1,9,31].

Кроме того, это совершенствование модели линейной теории упругости и формулировка краевых задач для неоднородных сред [17], требующих знания некоторых функций координат. Подобные модели используются в геофизике применительно к задачам об установлении структуры приповерхностного строения Земли (отметим одну из первых работ в этом направлении, выполненную более ста лет назад [29]), в задачах горной механики и разведки полезных ископаемых при определении их расположения и объема по отраженным упругим волнам. Совсем недавно подобные модели существенно неоднородных сред стали востребованы в биомеханике при описании свойств мягких и твердых тканей в рамках моделей теории упругости и вязкоупругости. Подобные задачи приводят к коэффициентным ОЗ [1, 20, 30, 32, 33], в которых требуется определять коэффициенты дифференциальных операторов в частных производных по граничным полям смещений или ускорений, измеренным на некотором отрезке времени или в некотором частотном диапазоне. Отметим также важный класс коэффициентных ОЗ, который практически не исследован – это задачи об определении существенно неоднородного предварительного напряженного состояния [5,12, 19] по амплитудно-частотным характеристикам и на основе других подходов [25].

Широкий класс ОЗ – геометрические ОЗ теории упругости [9,14], в которых требуется определять конфигурацию внутреннего дефекта (полость, трещина, включение), недоступного для непосредственного измерения по отраженным от дефекта упругим волнам. Задачи подобного типа в первую очередь актуальны для проблем, связанных с моделированием неразрушающего контроля и оптимизацией его схем на основе закономерностей отражения ультразвуковых волн. Для задач этого типа при формулировке операторных соотношений между причиной и следствием обычно используется аппарат граничных интегральных уравнений, позволяющий снизить размерность исследуемых задач [14], асимптотические методы [3,10] и граничноэлементные технологии в сочетании с процедурой регуляризации.

Заметим, что сформулированные выше проблемы механики деформируемого твердого тела опираются на линейные модели. Практически не исследованы ОЗ в нелинейной теории упругости, где проблема определения потенциала по данным экспериментов для различных материалов, в первую очередь, для биологических, далека от своего разрешения.

В-третьих, это ОЗ гидродинамики, среди которых особое место занимают задачи по определению стратификации Мирового океана в различных регионах, что является чрезвычайно важным для оптимизации судоходства подводных судов, ОЗ для уравнений Навье–Стокса, в частности, задачи об определении закона изменения вязкости жидкости по поперечному сечению, что в последние годы актуально при описании как движения сильновязких жидкостей по трубопроводам, так и при совершенствовании моделей течения крови по сосудам.

Большинство ОЗ механики приводят к ОЗ для обыкновенных дифференциальных операторов или для операторов с частными производными, в которых требуется определить либо правую часть дифференциального оператора, либо его коэффициенты по некоторой информации о решении (следы решений на некоторых поверхностях, функционалы, спектральные характеристики). Следует отметить, что наиболее полно исследованы ОЗ для обыкновенных дифференциальных уравнений в спектральной постановке (ОЗ Штурма–Лиувилля), которые стали предметом исследования относительно давно и где получены законченные результаты [16]. К сожалению, условия, при которых удается добиться завершенных результатов, (например, знание всех собственных значений дифференциального оператора второго или четвертого порядка или поля смещений на всей границе полупространства) практически невозможно выполнить на практике. Тем не менее, отметим монографии [20,26], где решен ряд одномерных ОЗ в нестационарной постановке для полупространства в предположении двукратной непрерывной дифференцируемости искомых параметров Ляме и плотности, в стационарной – для прямоугольника [6] и слоя [7].

Наиболее полно различные методы исследования разных классов ОЗ в механике деформируемого твердого тела представлены в монографии [9].

В настоящей работе проанализированы два наиболее трудных для исследования типа ОЗ теории упругости, приводящих к нелинейным некорректным проблемам: 1) геометрические ОЗ об идентификации внутренних дефектов в деформируемом теле (полостей, трещин, включений) или внешних границ тела, недоступных для непосредственного наблюдения; 2) коэффициентные ОЗ об определении модулей упругости, плотности или компонент тензора предварительного напряженного состояния как функций координат. Исходной информацией являются компоненты вектора перемещений, измеренные в некотором диапазоне частот на части границы в области приложения нагрузки. Обсуждены основные проблемы, возникающие при исследовании таких ОЗ, которые представляют собой некорректные задачи, весьма чувствительные к точности входной информации. Среди этих проблем отметим наиболее важные: 1) формулировку операторных соотношений, или итерационных процессов, связывающих измеренные и искомые функции, что приводит обычно к нелинейным операторным уравнениям с компактными операторами; 2) сведение операторных соотношений к последовательности классических некорректных задач для уравнения Фредгольма первого рода с непрерывным или суммируемым ядром и построение его решения на основе одного из методов регуляризации [21,22] (метод Тихонова, метод усеченных сингулярных разложений, проекционный метод [13], метод квазиобращения [15]); 3) разработку численных методов решения возникающих операторных уравнений с компактными операторами на основе сочетания современных вычислительных технологий (конечноэлементных и граничноэлементных) и методов регуляризации; 4) формулировку условий, обеспечивающих единственность решения исследуемых задач.

Заметим, что задачи об определении формы полости или конфигурации трещины в упругой среде исследуются обычно на основе метода граничных интегральных уравнений [10,14], который позволяет достаточно просто формулировать операторные уравнения для нахождения неизвестных геометрических характеристик.

При исследовании коэффициентных ОЗ часто искомые функции предполагаются одномерными (особенно при использовании моделей слоя, полупространства или слоистого полупространства), а наиболее распространенным способом их определения является анализ колебаний исследуемого объекта при варьировании способа нагружения, приводящий к исследованию обратных задач для обыкновенных дифференциальных уравнений с параметрами. Заметим, что к коэффициентным обратным задачам теории упругости, в которых требуется определить коэффициенты дифференциальных операторов по информации о граничных полях смещений, приводят несколько различных постановок, что отмечено в обзорной статье [8]. Основу методики решения ОЗ такого типа составляет метод линеаризации, требующий нахождения производных по Фреше от базового оператора задачи [2,4,9] и формулировку итерационных процессов [2].

В настоящей работе представлен единый подход к построению операторных соотношений для обоих типов задач, основанный на соотношении взаимности краевой задачи теории упругости неоднородного анизотропного тела; предложен способ построения итерационного процесса, на каждом шаге которого необходимо решать прямую задачу с переменными физическими характеристиками и обращать линейный вполне непрерывный оператор. Для численной реализации предложенной схемы решения прямых задач использованы как метод интегральных уравнений Фредгольма второго рода, так и конечноэлементные технологии. Отметим, что процедура построения операторных соотношений в прямой и обратной задачах значительно упрощается в практически важном случае – для малых геометрических и физических неоднородностей – и позволяет в итерационной процедуре ограничиться одним–двумя приближениями, что значительно сокращает время расчетов [10].

Обсуждены результаты вычислительных экспериментов в простейших задачах реконструкции модуля и плотности, указаны особенности реконструкции в конкретных задачах, рассмотрены примеры о реконструкции неоднородностей различного вида.

Отметим достаточно высокую точность реконструкции неизвестных характеристик в одномерных задачах для различных непрерывных законов неоднородности (монотонных, немонотонных) для конечных тел и значительную погрешность реконструкции для разрывных законов изменения модулей и плотности.

1. Постановка обратных коэффициентных задач. Рассмотрим установившиеся колебания с частотой ω ограниченной области V с кусочно-гладкой границей $S = S_u \cup S_\sigma$, причем n_j – компоненты единичного вектора внешней нормали к S. Сформулируем постановку разных типов коэффициентных обратных задач.

Задача 1–го типа. Уравнения колебаний имеют вид:

$$\sigma_{ij,j} + \rho\omega^2 u_i = 0 \quad i = 1,2,3 \tag{1.1}$$

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl} u_{k,l}, \quad m = 1,2,3 \tag{1.2}$$

$$u_i \Big|_{S_u} = 0, \quad \sigma_{ij} n_j \Big|_{S_\sigma} = p_i \tag{1.3}$$

Здесь c_{ijkl} – компоненты тензора упругих модулей, являющиеся кусочно-непрерывными функциями координат и удовлетворяющие обычным условиям симметрии и положительной определенности [17]. В частности, эти функции могут иметь конечное число разрывов первого рода на некоторых поверхностях внутри V (для кусочно-однородных тел). Введем в рассмотрение пространство $M_r(V)$ ограниченных функций на V, имеющих внутри V не более чем r поверхностей разрыва первого рода. Сформулируем задачу определения коэффициентов дифференциального оператора теории упругости с переменными коэффициентами из конуса неотрицательных функций, принадлежащих $M_r(V)$:

$$\begin{gathered} L_{ik} u_k = 0 \text{ , } L_{ik} = \partial_j c_{ijkl} \partial_l + \rho\omega^2 \delta_{ik} \\ u_i \big|_{S_u} = 0 \quad c_{ijkl} \partial_l u_k n_j \big|_{S_\sigma} = p_i \end{gathered} \tag{1.4}$$

по информации о граничных полях смещений

$$u_i \big|_{S_{\sigma 0}} = f_i(x, \omega), \quad \omega \in [\omega_1, \omega_2] \tag{1.5}$$

где $S_{\sigma 0}$ есть носитель нагрузки p_i.

Пример 1. Задача о нахождении закона изменения модуля сдвига $\mu \in M_r(S), 0 \le \mu \le C$, зависящего от координат в односвязной области $S \subset R_2$ с гладкой границей l, сводится к следующей краевой задаче с дополнительным граничным условием:

$$\left(\mu u_{,k}\right)_{,k} + \rho\omega^2 u = 0 \tag{1.6}$$

$$\mu \frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_{l_\sigma} = p, \quad u\big|_{l_u} = 0, \quad l = l_u \cup l_\sigma, \quad u\big|_{l_{\sigma 0}} = f(x, \omega), \quad \omega \in [\omega_1, \omega_2]$$

где $l_{\sigma 0}$ – есть носитель нагрузки p. Постановка задачи такого типа весьма актуальна своими приложениями в процедуре идентификации мягких биологических тканей, поскольку именно модуль сдвига является наиболее сильно изменяющейся характеристикой при патологиях.

Пример 2. Обратная задача об определении законов изменения модуля Юнга $E(x) \in M_r[0,l]$ и плотности $\rho(x) \in M_r[0,l]$ в задаче для стержня с постоянным поперечным сечением при продольных колебаниях описывается следующей краевой задачей:

$$(E(x)u'(x))' + \rho(x)\omega^2 u(x) = 0 \tag{1.7}$$
$$u(0) = 0, \quad E(l)u'(l) = -\sigma_0$$

Дополнительная информация в обратной задаче типа (1.7) задается в виде амплитудно-частотной характеристики торца стержня:

$$u(l,\omega) = f(\omega), \qquad \omega \in [\omega_1, \omega_2] \tag{1.8}$$

Отметим, что в постановках обычно требуется определить одну из этих функций при известной другой, поскольку нельзя определить единственным образом две функции из задачи (1.7)–(1.8) (для определения двух функций обычно требуется использовать также и уравнения изгибных колебаний). Анализ таких задач в случае сильных разрывов в коэффициентах (например, при определении упругих модулей костной ткани в месте перелома) требует корректной работы с операторами с разрывными коэффициентами [24].

Задачи 2-го типа – это задачи, к которым приводятся геометрические обратные задачи об определении форм полостей или включений малого характерного размера для стержней и пластин; для таких задач коэффициенты дифференциальных операторов отличны от постоянных значений лишь в некоторой малой подобласти исследуемого тела и методы их решения аналогичны исследованию задач первого типа.

Задача 3-го типа. Будем считать, что в теле имеется неоднородное предварительное напряженное состояние, характеризующееся компонентами тензора напряжений $\sigma_{ij}^{(0)}$, а колебания вызываются нагрузкой, приложенной на части S_σ; часть S_u закреплена. Будем использовать модель, в которой компоненты градиента предварительных смещений $u_{i,m}^{(0j)}$ пренебрежимо малы по сравнению с единицей (что часто осуществляется в постановках [6]). Линеаризованные относительно дополнительных смещений u_i уравнения колебаний после отделения времени имеют следующий вид [9]:

$$T_{ij,j} + \rho\omega^2 u_i = 0 \tag{1.9}$$

$$T_{ij} = \sigma_{ij} + u_{i,m}\sigma_{mj}^0 \tag{1.10}$$

$$\sigma_{mj} = c_{mjkl}u_{k,l} \tag{1.11}$$

$$u_i\big|_{S_u} = 0\ ,\ T_{ij}n_j\big|_{S_\sigma} = p_i \tag{1.12}$$

Считая, что тело находится в равновесии под действием массовых сил, и учитывая уравнения равновесия для предварительного напряженного состояния $\sigma_{ij,j}^0 + g_i = 0$, получим следующую краевую задачу:

$$L_{ik}u_k = 0\ ,\ L_{ik} = \partial_j c_{ijkl}\partial_l + (\rho\omega^2 + \sigma^0_{mj}\partial_m\partial_k - g_m\partial_m)\delta_{ik}$$
$$u_i\big|_{S_u} = 0 \quad (c_{ijkl}\partial_l + \delta_{ik}\sigma^0_{mj}\partial_m)u_k n_j\big|_{S_\sigma} = p_i \tag{1.13}$$

Отметим, что при отсутствии предварительного напряженного состояния задача (1.13) переходит в постановку (1.4).

Сформулируем задачу определения компонент тензора предварительного напряженного состояния – коэффициентов дифференциального оператора L_{ik} – по информации вида (1.5).

Наличие предварительного напряженного состояния приводит к изменению амплитудно-частотных характеристик точек тела V по сравнению с ненапряженным состоянием, которое может быть положено в основу процедуры идентификации начальных напряжений. Отметим, что акустические методы их идентификации в случае однородного начального напряженного состояния подробно обсуждались в литературе [5, 12, 19, 25], причем для определения его уровня достаточно измерять либо изменение скоростей упругих волн, либо изменение нескольких первых резонансных частот. К сожалению, такая методика оказывается неприменимой в случае неоднородного предварительного напряженного состояния, поскольку даже процедура решения прямой задачи (1.9)–(1.12) требует исследования краевой задачи для линейного дифференциального оператора в частных производных с переменными коэффициентами.

Пример 3. В качестве модельных примеров приведем вид соответствующих краевых задач при одноосном предварительном напряженном состоянии для консольно закрепленного изотропного стержня при действии силы на свободном конце.

3.1. Продольные колебания. Требуется определить $\sigma^0_{11}(x)$ из следующей задачи:

$$((E + \sigma^0_{11})u')' + \rho\omega^2 u = 0$$
$$u(0) = 0, \quad (E + \sigma^0_{11}(l))u'(l) = -p \tag{1.14}$$
$$u(l,\omega) = f(\omega),\ \omega \in [\omega_1, \omega_2]$$

Отметим, что по своей структуре задача (1.14) не отличается от задачи (1.7)–(1.8) по реконструкции модуля Юнга.

3.2. Изгибные колебания. Требуется определить $\sigma^0_{11}(x)$ из следующей задачи:

$$((E + \sigma^0_{11})Jw'')'' - F(\sigma^0_{11}w')' - \rho\omega^2 F w = 0$$

$$
\begin{aligned}
&w(0) = w'(0) = 0\\
&(E+\sigma_{11}^{0})Jw''(l) = 0 \quad ((E+\sigma_{11}^{0})Jw''(l))' = -p \qquad (1.15)\\
&w(l,\omega) = f(\omega),\ \omega \in [\omega_1, \omega_2]
\end{aligned}
$$

Отметим, что дифференциальное уравнение колебаний в (1.15) несколько отличается от традиционного, приведенного в [23] (обычно считается, что $\max \sigma_{11}^{0} / E << 1$). Таким образом, реконструкция предварительного напряжения σ_{11}^{0} осуществляется на основе решения обратной коэффициентной задачи для дифференциального оператора соответственно второго или четвертого порядка [3,9,13]. Существенным отличием этих задач от коэффициентных задач по определению модуля упругости или плотности является отсутствие априорной информации о положительности искомых функций [8], что осложняет процедуру их идентификации.

Замечание 1. Учитывая, что компоненты тензора предварительных напряжений могут быть выражены при помощи линейных операторов от компонент вектора массовых сил, обратную задачу можно свести к нахождению этих компонент.

Замечание 2. Отметим, что сформулированных условий вида (1.5) может оказаться недостаточно для определения всех компонент тензора упругих постоянных либо компонент тензора предварительного напряженного состояния. В этом случае для получения дополнительных операторных соотношений следует изменить либо место приложения нагрузки, либо ее структуру. Так, например, для стержня при определении модуля Юнга и плотности следует осуществить последовательно режим продольных и изгибных колебаний, измерить амплитудно-частотные характеристики, а затем решить совместно операторные уравнения, о которых речь пойдет ниже.

Сформулированные типы обратных коэффициентных задач являются нелинейными некорректными задачами [21,22], для решения которых предлагается использовать следующий подход, опирающийся на обобщенные соотношения взаимности [4] и позволяющий формулировать итерационные процессы [2], на каждом шаге которого обращаются операторные уравнения с вполне непрерывными операторами.

2. Формулировка обобщенного соотношения взаимности. Для получения операторных соотношений, связывающих заданные и искомые функции, в обратных коэффициентных задачах, которые являются нелинейными, наиболее часто используется метод линеаризации [9,13]. В [9] подобные операторные уравнения получены, когда искомые функции мало отличаются от постоянных и можно в явном виде построить ядра интегральных уравнений Фредгольма первого рода, позволяющих найти поправки. В общем случае, для нахождения искомой операторной связи необходимо обращать дифференциальные операторы с переменными коэффициентами, что практически невозможно осуществить аналитически для произвольных видов зависимостей. Как правило, большинство авторов, исследуя различные задачи неоднородной теории упругости, осуществляют замену исходного дифференциального оператора на дифференциальный оператор, который может быть обратим аналитически (как правило, это операторы с постоянными или кусочно-постоянными коэффициентами), что недостаточно обосновано, особенно при анализе колебаний [18]. Отметим, что процедура линеаризации требует вычисления производных по Фреше нелинейных операторов и решения задачи первого приближения. В то же время можно избежать этой громоздкой процедуры, используя обобщенное соотношение взаимности, которое сформулируем для задач третьего типа, как наиболее общей. Другие виды соотношений взаимности представлены в [8].

Пусть имеется два решения задачи (1.10)–(1.12), отвечающие различным предварительным напряженным состояниям, различным модулям упругости и различным плотностям. Основные характеристики задачи снабдим соответственно индексами 1 и 2: $u_i^{(1)}, \sigma_{ij}^{(01)}, T_{ij}^{(1)}$ и $u_i^{(2)}, \sigma_{ij}^{(02)}, T_{ij}^{(2)}$. Используя обычную технику для уравнения (1.10), умножая уравнения движения на соответствующую компоненту вектора смещений, вычитая, и интегрирую по объему V, имеем:

$$0 = \int_V \left[T_{ij,j}^{(1)} u_i^{(2)} - T_{ij,j}^{(2)} u_i^{(1)}\right] dV + \omega^2 \int_V (\rho^{(1)} - \rho^{(2)}) u_i^{(2)} u_i^{(1)} dV \qquad (2.1)$$

Используя преобразование первого объемного интеграла в (2.1) в поверхностный при помощи теоремы Гаусса–Остроградского, окончательно получим следующее соотношение:

$$\begin{gathered}\int_V \left(\sigma_{mj}^{(02)} - \sigma_{mj}^{(01)}\right) u_{i,j}^{(1)} u_{i,m}^{(2)} dV + \int_V (c_{mjkl}^{(2)} - c_{mjkl}^{(1)}) u_{k,l}^{(2)} u_{m,j}^{(1)} dV + \\ \int_{S\sigma} p_i \left(u_i^{(2)} - u_i^{(1)}\right) dS + \omega^2 \int_V (\rho^{(1)} - \rho^{(2)}) u_i^{(2)} u_i^{(1)} dV = 0 \qquad (2.2) \\ \omega \in [\omega_1, \omega_2]\end{gathered}$$

Из этого соотношения при отсутствии предварительного напряженного состояния вытекает соотношение взаимности для задач первого типа, полученное в [8]:

$$\begin{gathered}\int_V (c_{mjkl}^{(2)} - c_{mjkl}^{(1)}) u_{k,l}^{(2)} u_{m,j}^{(1)} dV + \int_{S\sigma} p_i \left(u_i^{(2)} - u_i^{(1)}\right) dS + \\ \omega^2 \int_V (\rho^{(1)} - \rho^{(2)}) u_i^{(2)} u_i^{(1)} dV = 0, \qquad \omega \in [\omega_1, \omega_2]\end{gathered} \qquad (2.3)$$

а при постоянных модулях упругости и плотности (в задаче 3-го типа) – следующее соотношение:

$$\int_V \left(\sigma_{mj}^{(02)} - \sigma_{mj}^{(01)}\right) u_{i,j}^{(1)} u_{i,m}^{(2)} dV + \int_{S\sigma} p_i \left(u_i^{(2)} - u_i^{(1)}\right) dS = 0, \qquad \omega \in [\omega_1, \omega_2] \qquad (2.4)$$

которое обобщает известное соотношение взаимности Бетти [17].

Построенные соотношения взаимности (2.2)–(2.4) позволяют сразу формулировать итерационные процессы во всех типах обратных задач, минуя процедуру решения задач первого приближения.

3. Построение итерационных процессов. Будем считать, что найдено некоторое начальное приближение искомых функций в классе функций простой структуры (постоянных, кусочно-постоянных, линейных), которое можно определить на основе минимизации функционала невязки J_0 на ограниченном подмножестве в R_n. Далее на каждой итерации строятся функционалы

$$J_n = \int_{\omega_1}^{\omega_2} \int_{S_{\sigma 0}} (f_i - u_i^{(n-1)})^2 dS d\omega \tag{3.1}$$

значения которых позволяют формулировать критерий выхода из итерационного процесса.

На основе соотношения (2.2) и его упрощенных вариантов можно построить итерационные процессы, сформулировать последовательность линейных интегральных уравнений с вполне непрерывными операторами и указать простой способ построения ядер на каждом этапе.

3.1. Задача 1-го типа. Будем исходить из соотношения (2.3), полагая в нем

$$u_i^{(1)} = u_i^{(n-1)}, \quad u_i^{(2)} = u_i^{(n-1)} + u_i^{(n)}, \quad c_{ijkl}^{(1)} = c_{ijkl}^{(n-1)}, \quad c_{ijkl}^{(2)} = c_{ijkl}^{(n-1)} + c_{ijkl}^{(n)}, \tag{3.2}$$

$$\rho^{(1)} = \rho^{(n-1)}, \rho^{(2)} = \rho^{(n-1)} + \rho^{(n)}$$

и, сохраняя линейные слагаемые, получим:

$$\int_V c_{ijkl}^{(n)} u_{k,l}^{(n-1)} u_{i,j}^{(n-1)} dV - \omega^2 \int_V \rho^{(n)} u_i^{(n-1)} u_i^{(n-1)} dV + \int_{S_{\sigma 0}} p_i (f_i - u_i^{(n-1)}) dS = 0 \tag{3.3}$$

$$\omega \in [\omega_1, \omega_2]$$

Соотношение (3.3) можно трактовать как интегральное уравнение относительно компонент $c_{ijkl}^{(n)}(x)$ и $\rho^{(n)}(x)$, если предварительно решена прямая задача о нахождении полей смещений и деформаций внутри области V и на ее границе S с упругими характеристиками предыдущего приближения $c_{ijkl}^{(n-1)}(x)$ и $\rho^{(n-1)}(x)$. Отметим, что подынтегральные выражения в объемных интегралах в (3.3) представляют собой по форме аналог удвоенной удельной потенциальной энергии деформаций и удельной кинетической энергии, в которой перемещения и деформации соответствуют (n–1)-й итерации (предыдущей), а модули – n-й итерации (последующей). Приведем вид таких соотношений для изотропной упругой среды. Поскольку в изотропном случае тензор упругих постоянных выражается через две функции Ляме $\lambda(x)$ и $\mu(x)$, то аналог уравнения

(3.3) в случае постоянной плотности примет вид [4]:

$$\int_V \left[\lambda^{(n)}(x)\left(u_{k,k}^{(n-1)}\right)^2 + \frac{1}{2}\mu^{(n)}(x)\left(u_{i,j}^{(n-1)} + u_{j,i}^{(n-1)}\right)\left(u_{i,j}^{(n-1)} + u_{j,i}^{(n-1)}\right)\right] dV + \\ + \int_{S_{\sigma 0}} p_i \left[f_i - u_i^{(n-1)}\right] dS = 0 \qquad \omega \in [\omega_1, \omega_2] \tag{3.4}$$

Заметим, что для примера 1, где требуется определить модуль сдвига, соответствующее интегральное уравнение имеет вид:

$$\int_S \mu^{(n)}(x)(u_{,k}^{(n-1)}(x,\omega)u_{,k}^{(n-1)}(x,\omega))dS + \int_{l_\sigma} p\left(f(\omega) - u^{(n-1)}(x,\omega)\right)dl = 0 \\ \omega \in [\omega_1, \omega_2] \tag{3.5}$$

Попутно отметим, что ядра в интегральных операторах (3.4) и (3.5) являются неотрицательными.

3.2. Задача 3-го типа. Для построения итерационного процесса будем исходить из соотношения (2.4) . Полагая в нем

$$\sigma_{ij}^{(01)} = t_{ij}^{(n-1)}, \quad \sigma_{ij}^{(02)} = t_{ij}^{(n-1)} + t_{ij}^{(n)}, \quad u_i^{(1)} = u_i^{(n-1)}, \quad u_i^{(2)} = u_i^{(n-1)} + u_i^{(n)}$$

и сохраняя линейные относительно возмущений слагаемые, получим интегральное уравнение вида:

$$\int_V t_{mj}^{(n)} u_{i,j}^{(n-1)} u_{i,m}^{(n-1)} dV + \int_{S_{\sigma 0}} p_i \left(f_i - u_i^{(n-1)}\right) dS = 0, \\ \omega \in [\omega_1, \omega_2] \tag{3.6}$$

которое можно использовать для определения поправок компонент тензора предварительных напряжений $t_{mj}^{(n)}$ [5] . При этом отметим, что в соответствии с замечанием 2 возможно построение аналогичных уравнений с другими ядрами и правыми частями при изменении нагрузки, что позволяет получить замкнутую систему уравнений.

Уравнения (3.3)–(3.6) порождают операторные уравнения Фредгольма 1-го рода с вполне непрерывными операторами, при обращении которых необходимо использовать регуляризующую процедуру [13, 21, 22] в той или иной форме при наличии априорной информации о том, что искомые функции неотрицательны и ограничены (для задач первого типа) или при ее отсутствии (для задач третьего типа). Множество поиска можно сузить также при наличии априорной информации о носителе неизвестных функций (полость, включение), или при наличии ограничения, что они зависят лишь от одной координаты, что часто встречается в приложениях, например для стержней, пластин или слоистых сред [3,6,7]. Как правило, интегральное уравнение или система интегральных уравнений такой структуры сводится к решению плохообусловленной системы линейных алгебраических уравнений относительно узловых переменных на основе одной из проекционных схем, в частности на основе конечноэлементной аппроксимации и разложении неизвестных функций по функциям формы

[6]. Конечноэлементные технологии в сочетании с методами регуляризации в задачах такого типа являются наиболее эффективными инструментом решения обратных коэффициентных задач.

Отметим также, что выбор отрезка изменения частоты колебаний является весьма важным как с точки зрения обоснования единственности поставленных обратных задач, так и с точки зрения построения эффективных численных схем.

Замечание. На основании соотношения (3.3) можно легко построить итерационные процессы в задачах об отыскании конфигурации неизвестной полости, включения или трещины, минуя довольно трудоемкую процедуру формулировки граничных интегральных уравнений [9,10,14]. Так, например, если известно, что неоднородность представляет собой полость в среде с известными модулями и плотностью, то начальное приближение находится в классе простейших конфигураций (окружностей или сфер), и итерационный процесс в этом случае (модули и плотность постоянны) приводит к нахождению новой конфигурации из интегрального уравнения

$$\int\limits_{V_n/V_{n-1}} (c_{ijkl} u_{k,l}^{(n-1)} u_{i,j}^{(n-1)} - \omega^2 \rho \ u_i^{(n-1)} u_i^{(n-1)}) dV + \int\limits_{S_{\sigma 0}} p_i (f_i - u_i^{(n-1)}) dS = 0 \qquad (3.7)$$

$$\omega \in [\omega_1, \omega_2]$$

которое также может быть решено на основе конечноэлементных технологий. В этом случае ядро интегрального оператора выражается через удельный Лагранжиан, найденный на основе компонент из предыдущей итерации.

4. Примеры. В качестве простейшего примера, иллюстрирующего предложенную схему построения решений обратных задач, приведем реализацию задач о реконструкции модуля Юнга и плотности в простейшей одномерной задаче для стержня на основе постановки (1.7) – (1.8). В соответствии с итерационной процедурой, представленной в п.3, соответствующий итерационный процесс строится на основе следующего интегрального уравнения, легко получающегося из (3.3):

$$\int\limits_0^1 (u^{(n-1)\prime}(x,\omega))^2 E^{(n)}(x) dx - \omega^2 \int\limits_0^1 (u^{(n-1)}(x,\omega))^2 \rho^{(n)}(x) dx = -\sigma_0 (f(\omega) - u^{(n-1)}(l,\omega)) \qquad (4.1)$$

$$\omega \in [\omega_1, \omega_2]$$

Дальнейшее упрощение обратной задачи состоит в том, раздельно ли рассматриваются подзадача 1 восстановления модуля при известном законе изменения плотности и подзадача 2 о восстановлении плотности при известном законе изменения модуля. Каждая из этих подзадач приводит к итерационному процессу, основанному на решении интегрального уравнения Фредгольма 1 рода с суммируемым ядром, которое реализовано с помощью метода Тихонова [22]:

$$\int_0^1 (u^{(n-1)'}(x,\omega))^2 E^{(n)}(x)dx = -\sigma_0(f(\omega) - u^{(n-1)}(l,\omega)) \qquad \omega \in [\omega_1, \omega_2] \tag{4.2}$$

$$\omega^2 \int_0^1 (u^{(n-1)}(x,\omega))^2 \rho^{(n)}(x)dx = \sigma_0(f(\omega) - u^{(n-1)}(l,\omega)) \qquad \omega \in [\omega_1, \omega_2] \tag{4.3}$$

В случае слабых неоднородностей достаточно ограничиться одним приближением [9]. В общем случае обычно для нахождения искомой функции достаточно 3–4 итераций. На рис.1 приведены результаты восстановления немонотонной безразмерной функции плотности $\rho(x)/\rho_0 = (1 + (x/l - 0.5)^2)$ в стержне, модуль упругости которого изменяется по закону $E(x)/E_0 = (3 + 2x/l)$. В вычислительном эксперименте, представленном на рисунке 1, кроме того, для выполнения условий единственности [9] задано значение функции плотности в точке $x = 0$. Отметим, что если информация о плотности при x=0 отсутствует, то погрешность восстановления функции плотности составляет более 20 %.

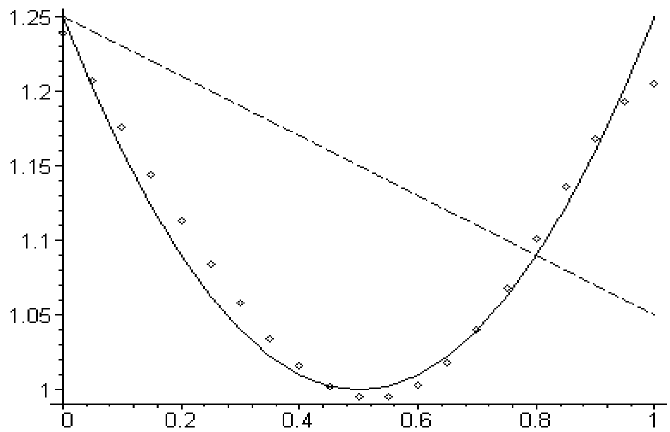

Рис. 1. Результаты восстановления немонотонной безразмерной функции плотности (пояснения в тексте). Сплошная линия –точное решение, штриховая – начальное приближение, ◊ – решение ,полученное в результате решения обратной задачи.

На рис.2 представлены результаты восстановления кусочно-постоянной функции. Отметим, что для таких сильных неоднородностей восстанавливается некоторая усредненная функция, особенно сильно отличающаяся от истинной в месте разрыва.

В заключение отметим, что обратные задачи в механике – интенсивно развивающийся раздел математической физики, требующий совершенствования как аналитических, так и численных средств исследования.

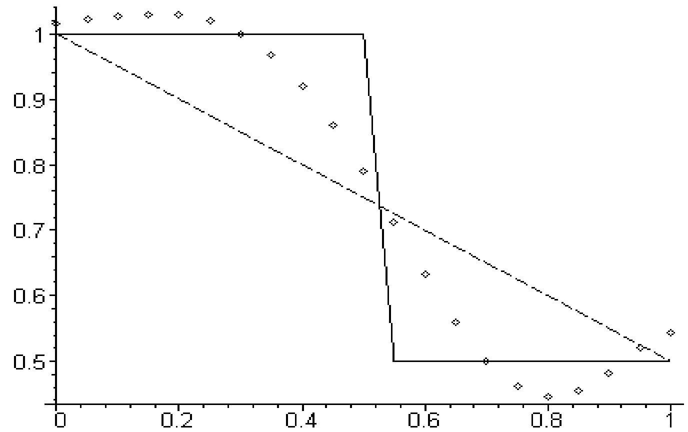

Рис.2. Результаты восстановления кусочно-постоянной функции. Обозначения те же, что на рис.1.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№10–01–00194–а) и ФЦП " Научные и научно–педагогические кадры инновационной России" на 2009 – 2013 годы (госконтракт № П596).

ЛИТЕРАТУРА

1. Алифанов О.М., Артюхин Е.А., Румянцев С.В. Экстремальные методы решения некорректных задач.– М.: Наука, 1988. –288 с.
2. Бакушинский А. Б., Гончарский А. В. Итеративные методы решения некорректных задач. – М.: Наука,1989. – 128с.
3. Бочарова О. В., Ватульян А. О., Жарков Р.С. Реконструкция малых полостей в упругих стержнях. // Известия вузов. Сев. кавк. рег.Сер. естеств науки. – 2006. –№2. – С.28–32.
4. Ватульян А. О. Интегральные уравнения в обратных задачах определения коэффициентов дифференциальных операторов теории упругости. // Доклады РАН–2005. – т.405 № 3 . – С.343–345.
5. Ватульян А. О. К формулировке интегральных уравнений в проблеме идентификации предварительного напряженного состояния. // Экологический вестник научных центров ЧЭС. – 2006. – №2. – С. 23–25.
6. Ватульян А. О., Соловьев А. Н. Об итерационном подходе в обратных задачах теории упругости. // Экологический вестник научных центров ЧЭС. – 2006. – №1. – С. 23–29.
7. Ватульян А. О. Сатуновский П. С.Об определении модулей при

анализе колебаний неоднородного упругого слоя. // Доклады РАН. – 2007. – т. 414,№1. – С.36–38.
8. Ватульян А. О. Проблемы идентификации неоднородных свойств твердых тел. // Вестник Самарского госуниверситета, естественные науки. – 2007.– № 4 (54). – С.93–103.
9. Ватульян А. О. Обратные задачи в механике деформируемого твердого тела. – М.: Физматлит, 2007. – 224с.
10. Ватульян А. О., Явруян О. В. Асимптотический подход в задачах идентификации трещин. // ПММ – 2006.– №4. – С.714–724
11. Галиуллин А. С. Аналитическая динамика. – М.: Высшая школа, 1989. – 264с.
12. Гузь А.Н. Упругие волны в сжимаемых материалах с начальными напряжениями и неразрушающий ультразвуковой метод определения двухслойных остаточных напряжений. // Прикладная механика. –1994. – т. 30. № 1. – С. 3–17.
13. Денисов А.М. Введение в теорию обратных задач. – М.: МГУ, 1994. – 206 с.
14. Колтон Д., Кресс Р. Методы интегральных уравнений в теории рассеяния.– М.:Мир,1987. – 311 с.
15. Латтес Р., Лионс Ж.-Л. Метод квазиобращения и его приложения. – М.:Мир, 1970. – 336 с.
16. Левитан Б. М. Обратная задача Штурма–Лиувилля. – М.: Наука, 1984. – 240с.
17. Ломакин В. А. Теория упругости неоднородных тел. – М.: МГУ, 1976. – 368с.
18. Лу Л.-Ю., Жанг Б.-К.. Нахождение слоя с малой скоростью сдвиговых волн релеевской волной с помощью генетических алгоритмов. // Акустич. Журнал. – 2006. – т. 52, №6. – С. 811–824.
19. Никитина Н.Е. Акустоупругость. Опыт практического применения. – Н.Новгород.: ТАЛАМ, 2005. – 208с.
20. Романов В. Г. Обратные задачи математической физики. – М.: Наука,1984. – 261с.
21. Самарский А.А., Вабищевич П.Н. Численные методы решения обратных задач математической физики. – М.: Едиториал УРСС, 2004. – 480 с.
22. Тихонов А.Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1986. – 287 с.
23. Филиппов А. П. Колебания деформируемых систем. – М.: Машиностроение, 1970. – 734с.
24. Филиппов А. Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. – М.: Наука, 1985. – 224с.
25. Чернышев Г.Н., Попов А.Л., Козинцев В.М., Пономарев И.И. Остаточные напряжения в деформируемых твердых телах. – М.: Наука,

1996. – 240с.
26. Яхно В.Г. Обратные задачи для дифференциальных уравнений упругости. – Новосибирск: Наука, 1990. – 304с.
27. Bui H.D. Inverse Problems in the Mechanic of Materials: An Introduction. – CRC Press, Boca Raton, FL. 1994. – 224p.
28. Isakov V. Inverse problems for PDE. – Springer–Verlag, 2005. – 284p.
29. Herglotz G. Uber die Elastizitat der Erde bei Borucksshtiqung unter Variablen Dichte. // Zeitschr.fur Math. und Phys. – 1905. – Bd.52 № 3 – s.275–299.
30. Oberai A.A., Gokhale N. H., Feijoo G R. Solution of inverse problems in elasticity imaging using the adjoint method. // Inverse problems. – 2003. – № 19. – P. 297–313.
31. Pabst U., Hagedorn P. Identification of boundary conditions as a part of model correction. // J.Sound Vibr. – 1995. – v.182,№4. – P.565–575.
32. Piana M. On uniqueness for anisotropic inhomogeneous inverse scattering problems. // Inverse problems. – 1998. – v.14. – P. 1565–1579.
33. Tardieu N., Constantinescu A. On the determination of elastic coefficients from indentation experiments. // Inverse Problems. – 2000. – v .16. – P.577–588.