АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ В ДИНАМИЧЕСКИХ ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ ТОНКИХ ПЛАСТИН

Ветров О.С.

Донецкий национальный университет, Донецк, Украина

При решении многих начально–краевых задач теории пластин необходимо знать фундаментальные решения искомых уравнений. Построение фундаментального решения динамики ортотропных пластин имеет также важное практическое значение, так как указанное решение необходимо для реализации метода граничных элементов, широко распространенного в инженерных расчетах.

Следует отметить, что для нестационарных задач имеющиеся работы ограничиваются рассмотрением лишь изотропных случаев пластин [1–3]. Поэтому исследование случая ортотропии материала является актуальным. Причем необходимо исследовать асимптотику полученных решений, что является важным при решении различных смешанных задач теории упругости.

Метод асимптотических исследований в теории пластин и оболочек является достаточно распространенным [4, 5]. Однако вопросы, связанные с асимптотическим поведением тонкостенных элементов конструкций в случае динамического нагружения рассмотрены недостаточно.

Данная работа является продолжением исследований, начатых в [6–9].

Целью работы является построение асимптотических представлений фундаментального решения динамики ортотропных пластин в виде, приемлемом для дальнейших практических исследований.

1. Постановка задачи. Рассматривается бесконечная тонкая пластина с постоянной толщиной h, изготовленная из ортотропного материала. Главные оси ортотропии совместим с координатными осями (x', y'). Переход к динамическим задачам выполнен квазистатическим методом.

Уравнение динамического изгиба тонкой ортотропной пластины в классических предположениях, с учетом принятых в [10] обозначениях, запишем

$$\nabla^2\nabla^2 w - 4(1-a)\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\kappa^2 h^4}{D} q(x', y', t'), \tag{1}$$

$$\mu = 1 - 2G_{12}\frac{1+\nu}{E},\ 2a = 2 - \mu + \mu\nu,\ \nu = \sqrt{\nu_1\nu_2},\ E = \sqrt{E_1 E_2},\ \kappa^4 = \frac{E_1}{E_2},$$

где w – прогиб пластины; G_{12} – модуль сдвига; E_1, E_2 – модули Юнга; ν_1, ν_2 – коэффициенты Пуассона; D – цилиндрическая жесткость; ρh – масса единицы поверхности; $q(x', y', t')$ – интенсивность динамической нагрузки, нормальной к срединной плоскости пластинки.

Отметим, что уравнение (1) записано в безразмерной системе координат (x, y, t), определяемой соотношениями

$$x' = \kappa h x\,,\ y' = hy\,,\ t' = \kappa t h^2 \sqrt{\rho h D^{-1}}\ . \tag{2}$$

Запишем некоторые физические соотношения теории пластин, связанные с динамическим прогибом [10]

$$M_1 = -\frac{D}{h^2}\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right],$$

$$M_2 = -\frac{D\kappa^{-2}}{h^2}\left[\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right], \tag{3}$$

$$H = -\frac{D}{h^2}\frac{(1-\nu)(1-\mu)}{\kappa}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\,,$$

где M_1, M_2, H – изгибные и крутящие моменты.

Построим фундаментальное решение уравнения (1). В этом случае динамическая нагрузка представляет собой мгновенный импульс, который моделируется с помощью обобщенной дельта-функции Дирака.

2. Аналитическое решение. Применим к уравнению (1) сначала двумерное интегральное преобразование Фурье по геометрическим координатам, затем преобразование Лапласа по времени. Начальные условия считаем нулевыми.

Выражение для трансформанты динамического прогиба в пространстве Фурье–Лапласа запишется в виде

$$\overline{w}(\xi, \eta, s) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\rho h D}}\frac{1}{(\xi^2 + \eta^2)^2 - 4(1-a)\xi^2\eta^2 + s^2}\,,$$

где (ξ, η, s) – новые координаты в пространстве трансформант.

С помощью формул обращения интегральных преобразований Фурье и Лапласа, из выражения (4) запишем оригинал прогиба

$$w(x, y, t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty}\left[\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty \overline{w}(\xi, \eta, s)\cos(\xi x)\cos(\eta y)\,d\xi d\eta\right]e^{st}\,ds\ .$$

В соответствии с методикой [6–7], в подынтегральном выражении перейдем к полярным координатам $\xi = R\cos\theta$, $\eta = R\sin\theta$, и $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$. С целью разделения переменных воспользуемся разложением Якоби [6]

$$\cos(\xi x)\cos(\eta y) = J_0(rR) + 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n J_{2n}(rR)\cos 2n\varphi \cos 2n\theta\,,$$

где $J_n()$ – функция Бесселя 1-го рода.

Для упрощения записей, введем в рассмотрение $w_1(r, \varphi, t)$ по формуле $w_1(r,\varphi,t) = 2\pi\sqrt{\rho hD}\,w(r,\varphi,t)$.

После выполнения обратного преобразования Лапласа получим

$$w_1 = \frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \varepsilon_n \cos 2n\phi \int_0^{\pi/2} \frac{\cos 2n\theta d\theta}{N_\theta} \int_0^{\infty} \sin(tR^2 N_\theta) \frac{J_{2n}(rR)}{R} dR$$

$$N_\theta = \sqrt{1-(1-a)\sin^2 2\theta}, \qquad \varepsilon_n = \begin{cases} 1, n=0 \\ 2, n=1,2... \end{cases} \tag{4}$$

В работе [7] для разделения переменных в подынтегральном выражении использовались разложения тригонометрических функций в ряды Неймана. Однако исследование асимптотического поведения полученного решения по формулам [7] затруднительно.

Иной подход заключается в использовании тригонометрических представлений функций Бесселя полуцелого порядка, затем формулой умножения для бесселевых функций. В итоге (4) запишется в виде

$$w_1(r,\varphi,t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \varepsilon_n \cos 2n\varphi \times$$

$$\times \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{k+\frac{1}{2}}(1-a)^k}{2^k k!} W_{nk} \int_0^{\infty} R^{2k} J_{k+\frac{1}{2}}(tR^2) J_{2n}(rR) dR, \tag{5}$$

$$W_{nk} = \int_0^{\pi/2} \cos 2n\theta \sin^{2k} 2\theta d\theta.$$

Указанный тригонометрический интеграл W_{nk} вычисляется в конечном виде. При нечетных значениях n выражение $W_{nk} = 0$, при четных запишем

$$W_{nk} = \frac{(-1)^{n/2}\pi}{2^{2k+1}} \binom{2k}{k-n/2}. \tag{6}$$

Подставим (6) в (5) и получим окончательное выражение для динамического прогиба пластины

$$w(r,\varphi,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\rho hD}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \varepsilon_n \cos 4n\varphi \times$$

$$\times \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1-a)^k}{2^{k+2} k!} \binom{2k}{k-n} \chi^{-k-\frac{1}{2}} G^{-1-2k}_{k+\frac{1}{2},4n}\left(\frac{\chi^2}{4}\right), \tag{7}$$

где $\chi = r^2/4t$.

Выражение прогиба тонкой пластины (7) записано с помощью специальной функции гипергеометрического типа $G^{\gamma}_{\alpha,\beta}(z)$, введенной в

[11, 12], которую можно записать через G–функцию Мейера

$$G^{\gamma}_{\alpha,\beta}(z) = G^{2,1}_{2,4}\left(z \middle| \begin{matrix} 1-\frac{\alpha}{2}, 1+\frac{\alpha}{2} \\ -\frac{\alpha+\gamma}{2}+\frac{\beta}{4}, -\frac{\alpha+\gamma-1}{2}+\frac{\beta}{4}, -\frac{\alpha+\gamma-1}{2}-\frac{\beta}{4}, -\frac{\alpha+\gamma}{2}-\frac{\beta}{4} \end{matrix} \right).$$

Полученное выражение (7) является искомым фундаментальным решением уравнения (1). Механический смысл его состоит в том, что (7) является решением задачи о действии на пластинку мгновенного импульса единичной интенсивности.

Поставим (7) в формулы (3). Получившиеся выражения для изгибных моментов запишутся

$$M_j = \frac{Dr^{-2}}{\kappa^{2j} h^2} \frac{\kappa^2}{\sqrt{2\pi\rho h D}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \varepsilon_n \cos 2n\varphi \times$$

$$\times \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1-a)^k}{2^{k-1} k!} M_j^{nk} \chi^{-k-\frac{1}{2}} G^{-2-2k}_{k+\frac{1}{2},2n}\left(\frac{\chi^2}{4}\right), \tag{8}$$

$$M_j^{nk} = \begin{cases} (-1)^m (1+\nu)\begin{pmatrix} 2k \\ k+m \end{pmatrix}, n = 2m \\ (-1)^{m+j} \dfrac{(1-\nu)}{2}\left[\begin{pmatrix} 2k \\ k+m+1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2k \\ k+m \end{pmatrix}\right], n = 2m+1 \end{cases} \tag{9}$$

где $m = \overline{0,\infty}$, $j = \overline{1,2}$.

Соответственно выражение для крутящего момента примет вид

$$H = -\frac{Dr^{-2}}{\kappa h^2} \frac{(1-\nu)(1-\mu)}{\sqrt{2\pi\rho h D}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \sin(4n+2)\varphi \times$$

$$\times \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1-a)^k}{2^{k-1} k!} \begin{pmatrix} 2k+1 \\ k-n \end{pmatrix} \chi^{-k-\frac{1}{2}} G^{-2-2k}_{k+\frac{1}{2},4n+2}\left(\frac{\chi^2}{4}\right). \tag{10}$$

Поскольку (7) является фундаментальным решением, то полученные выражения (8)–(10) для M_1, M_2, H будут представлять собой компоненты фундаментальной матрицы моментов.

Исследуем асимптотическое поведение полученных выражений.

3. Асимптотические представления. Асимптотические представления выражений (7)–(10) следуют из асимптотического поведения введенной в рассмотрение гипергеометрической функции $G^{\gamma}_{\alpha,\beta}(z)$. Она имеет две особые точки: $z = 0$ и $z = \infty$. Поэтому рассмотрим два наиболее важных случая асимптотического поведения: в окрестности начала координат и при начальных моментах времени.

Вначале рассмотрим случай, когда $r \to 0$. Асимптотическое представление функции $G^{\gamma}_{\alpha,\beta}(z)$ будет иметь вид

$$G^{\gamma}_{\alpha,\beta}(z) \sim \frac{2^{\beta} z^{\frac{-2\alpha-2\gamma+\beta}{4}}}{\Gamma(\beta+1)} \left[\frac{\Gamma\left(-\frac{\gamma}{2}+\frac{\beta}{4}\right)}{\Gamma\left(1+\alpha-\frac{\beta}{4}+\frac{\gamma}{2}\right)} - \frac{4z^{\frac{1}{2}}}{\beta+1} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{\gamma}{2}+\frac{\beta}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\alpha-\frac{\beta}{4}+\frac{\gamma}{2}\right)} \right],$$

где $\Gamma()$ – гамма–функция.

Применим полученное асимптотическое представление к формулам (7). Удерживая несколько первых членов разложения, получим

$$w(\chi) \sim \frac{1}{\sqrt{\rho h D}} \left[\frac{5-a}{32} - \frac{3-a}{8\pi} \chi \right], \tag{11}$$

где слагаемые в скобках имеют смысл первого и второго пластиночных приближений соответственно.

Аналогично получим асимптотические представления для моментов

$$M_j(\chi,\varphi) \sim \frac{D r^{-2}(3-a)}{h^2 \kappa^{2(j-1)} \sqrt{\rho h D}} \left[\frac{1+\nu}{4\pi} \chi + (-1)^j \frac{1-\nu}{12\pi} \chi^3 \cos 2\varphi \right], \tag{12}$$

$$H(\chi) \sim -\frac{D r^{-2}(1-\nu)(1-\mu)}{h^2 \kappa \sqrt{\rho h D}} \frac{5-3a}{12\pi} \chi^3 \sin 2\varphi\,. \tag{13}$$

Далее рассмотрим поведение прогиба при начальных моментах времени, т.е. при $t \to 0$. Для нашего случая

$$G^{\gamma}_{\alpha,\beta}(z) \sim \frac{z^{-\alpha-\gamma-\frac{3}{4}}}{\sqrt{\pi}} \cos\left(2\sqrt{z} + \frac{\pi}{2}\left(\alpha - \beta - \frac{1}{2} \right) \right).$$

Тогда соответствующие асимптотические выражения будут

$$w(\chi) \sim \frac{5-a}{16\pi\sqrt{\rho h D}} \frac{\cos(\chi)}{\chi}, \tag{14}$$

$$M_1(\chi,\varphi) \sim \frac{(1+\nu) D h^{-2}}{\sqrt{\rho h D}} \frac{t^{-1}}{8\pi} \cos\chi \left[1 + \frac{1-\nu}{1+\nu} \cos 2\varphi \right], \tag{15}$$

$$M_2(\chi,\varphi) \sim \frac{(1+\nu) D h^{-2}}{\kappa^2 \sqrt{\rho h D}} \frac{t^{-1}}{8\pi} \cos\chi \left[1 - \frac{1-\nu}{1+\nu} \cos 2\varphi \right], \tag{16}$$

$$H(\chi) \sim \frac{D(1-\nu)(1-\mu)}{h^2 \kappa \sqrt{\rho h D}} \frac{t^{-1}}{8\pi} \cos\chi \sin 2\varphi\,. \tag{17}$$

В формулах (14)–(15) мы ограничились первым пластиночным приближением для моментов времени, близких к начальному.

4. Частные случаи ортотропии. Можно существенно упростить полученные выражения (7)–(10), если предположить [10], что между упругими постоянными ортотропии существует зависимость вида $2G_{12} = \sqrt{E_1 E_2} \Big/ (1+\sqrt{\nu_1 \nu_2})$.

В этом случае в (7) – (10) необходимо положить $\mu = 0$ и $a = 1$. Получим следующие выражения, записанные в координатах (2).

$$w = \frac{\chi^{-1/2}}{4\sqrt{2\pi\rho h D}} G_{1/2,0}^{-1}\left(\frac{\chi^2}{4}\right),$$

$$M_1 = -\frac{2Dr^{-2}h^{-2}}{\chi^{1/2}} \frac{(1+\nu)}{\sqrt{2\pi\rho h D}} \left[G_{1/2,0}^{-2}\left(\frac{\chi^2}{4}\right) - \frac{(1-\nu)}{(1+\nu)} G_{1/2,2}^{-2}\left(\frac{\chi^2}{4}\right)\cos 2\varphi \right],$$

$$M_2 = -\frac{2Dr^{-2}h^{-2}}{\kappa^2 \chi^{1/2}} \frac{(1+\nu)}{\sqrt{2\pi\rho h D}} \left[G_{1/2,0}^{-2}\left(\frac{\chi^2}{4}\right) + \frac{(1-\nu)}{(1+\nu)} G_{1/2,2}^{-2}\left(\frac{\chi^2}{4}\right)\cos 2\varphi \right],$$

$$H = -\frac{2D(1-\nu)h^{-2}}{\kappa} \frac{r^{-2}}{\sqrt{2\pi\rho h D}} \chi^{-1/2} G_{1/2,2}^{-2}\left(\frac{\chi^2}{4}\right)\sin 2\varphi .$$

Если в приведенных выше формулах дополнительно предположить $E_1 = E_2$, $\nu_1 = \nu_2$, соответственно $\kappa = 1$, то мы получим решения для случая изотропной пластины.

Аналогично можно получить и упрощенные выражения для асимптотических формул (11)–(16).

Отметим, что динамический прогиб изотропной пластины, записанный с помощью новой специальной функции $G_{\alpha,\beta}^{\gamma}(z)$, совпадает с известным решением [1, 2].

5. Выводы. Было построено фундаментальное решение динамики ортотропных пластин в форме, удобной для дальнейшего исследования его асимптотического поведения. Найдены компоненты фундаментальной матрицы, соответствующие динамическому прогибу тонкой пластины.

Построены асимптотики решений, удобные для практических расчетов во многих задачах динамической теории упругости. Рассмотрен важный частный случай ортотропии, позволяющий свести полученные решения и асимптотики к случаю тонкой пластины, изготовленной из изотропного материала.

Перспективным является продолжение исследования асимптотических представлений полученных решений, а также выявление границ их применимости. Также являются необходимыми численные и аналитические исследования влияния на асимптотику анизотропии материала при различных значениях упругих параметров.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шувалова Ю.С. Численное исследование сходимости метода дискретных особенностей в задачах динамики тонких упругих пластин // Вісник Харк. нац. ун-ту. Серія "Мат. моделювання. Інформ. техн. Автоматизовані системи управління". – 2009. – № 847. – С. 345–349.
2. Жигалко Ю.П., Садыкова М.М. Динамика, тонкой круглой пластинки при нестационарном локальном нагружении // Исслед. по теор. пластин и оболочек. – 1990. – № 20. – С.184–191.
3. Слепян Л.И. Нестационарные упругие волны. – Л.: Судостроение. – 1972. – 373 с.
4. Aghalovyan L.A. Asimptotic theory of anisotropic plates and shells // Proceedings of NAS RA. Mechanics. – 2009. –Vol. 62, № 1. – P. 5–39.
5. Большаков В.И., Андрианов И.В., Данишевский В.В. Асимптотические методы расчета композитных материалов с учетом внутренней структуры. – Днепропетровск: Пороги. – 2008. – 196 с.
6. Вєтров О.С., Шевченко В.П. Дослідження напружено-деформованого стану ортотропних оболонок під дією динамічних імпульсних навантажень // Мат. методи та фіз.–мех. поля. – 2011. – т.54, № 1. – С. 196–203.
7. Шевченко В.П., Ветров О.С. Динамика тонкой ортотропной пластинки при импульсном нагружении // Актуальные проблемы механики деф. твердого тела: Материалы VI международной научной конференции. – 2010. – С.215–219.
8. Ветров О.С. Асимптотические представления в задачах динамики ортотропных пластин и оболочек // Совр. проблемы мат. и ее приложения в естественных науках и информ. технологиях. Тезисы докладов международной конференции. – 2011. – С. 29–30.
9. Ветров О.С. Фундаментальное решение уравнения динамического изгиба тонкой ортотропной пластинки // XXIII Международная научная конференция. Математические методы в технике и технологиях: Сборник трудов. – 2010. – т. 5. – С.25–26.
10. Шевченко *В. П.* Методы фундаментальных решений в теории ортотропных оболочек // Концентрация напряжений / Под ред. А. Н. Гузя, А. С. Космодамианского, В. П. Шевченко. – Киев: А.С.К. – 1998. – Т. 7. – С. 159–196. (Механика композитов: В 12 т. Т. 7).
11. Нагорная Р.М., Цванг В.А., Шевченко В.П. Фундаментальные решения динамических уравнений теории пологих оболочек // Изв. АН СССР. МТТ. – 1994. – № 3. – С.173–180.
12. Нагорная Р.М., Цванг В.А. Действие внезапно приложенных загрузок, распределенных по малым круговым площадкам, на тонкие оболочки // Труди вузівської конф. проф.-викл. складу за підс. наук-досл роботи: математика, фізика, екологія. – Донецьк: ДонДУ. – 1997. – С.86–88.