ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ГИРОСТАТА ВОКРУГ НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКИ

Волкова О.С., Гашененко И.Н.

Институт прикладной математики и механики НАН Украины, г. Донецк

В современной динамике твердого тела важную роль играет изучение движения специальных механических систем – гиростатов. Понятие *гиростат* встречается уже в работах У. Томсона и Э. Грея и связано с предположением о постоянстве распределения масс системы. В известном курсе теоретической механики Т. Леви–Чивита и У. Амальди [1] гиростатом называют механическую систему, состоящую из тела–носителя и присоединенных к нему тел (изменяемых или твердых), в результате движения которых распределение масс всей системы не изменяется. Этому определению удовлетворяет, например, твердое тело с закрепленными в нем осями физически и геометрически симметричных маховиков либо тело с полостью, заполненной идеальной несжимаемой жидкостью. На основании теоремы об изменении момента количества движения, вращение гиростата вокруг неподвижной точки в поле силы тяжести описывается уравнениями

$$\mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \dot{\boldsymbol{\lambda}} = (\mathbf{J}\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda}) \times \boldsymbol{\omega} + \mathbf{r} \times \boldsymbol{\gamma}, \quad \dot{\boldsymbol{\gamma}} = \boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\omega}, \tag{1}$$

где $\mathbf{J} = \mathrm{diag}\{J_1, J_2, J_3\}$ – тензор инерции гиростата, приведенный к главным осям; $\boldsymbol{\omega}$ – угловая скорость гиростата в подвижном базисе; $\boldsymbol{\gamma}$ – орт вертикали; $\mathbf{r}$ – вектор, направленный вдоль барицентрической оси; $\boldsymbol{\lambda}$ – *гиростатический момент*, возникающий за счет циклических движений присоединенных тел. Параметр $|\mathbf{r}|$, равный произведению веса гиростата на расстояние от центра масс до неподвижной точки, не существенен. Для уравновешенного гиростата $\mathbf{r} = 0$, в ином случае замена $\tilde{\boldsymbol{\omega}} = |\mathbf{r}|^{-1/2}\boldsymbol{\omega}$, $\tilde{\boldsymbol{\lambda}} = |\mathbf{r}|^{-1/2}\boldsymbol{\lambda}$, $\tilde{t} = |\mathbf{r}|^{1/2} t$ позволяет ввести $\tilde{\mathbf{r}} = \mathbf{r}/|\mathbf{r}|$, $|\tilde{\mathbf{r}}| = 1$. Система (1) допускает первые интегралы

$$(\mathbf{J}\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\gamma}) = g, \quad |\boldsymbol{\gamma}|^2 = 1. \tag{2}$$

Интегрируемый случай движения уравновешенного гиростата с переменным $\boldsymbol{\lambda}$ рассматривали еще Н.Е. Жуковский и В. Вольтерра. Вообще говоря, при произвольном $\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\lambda}(t)$ система (1) не замкнута: требуются дополнительные уравнения, описывающие движение присоединенных тел. Эти уравнения определяются конфигурацией конкретной механической системы. Следуя В. Вольтерра [2], можно поставить и обратную задачу: определить компоненты вектора $\boldsymbol{\lambda}(t)$, необходимого для реализации заданного типа движения гиростата.

Далее систему (1) будем исследовать в предположении, что направление гиростатического момента фиксировано в несущем теле: $\boldsymbol{\lambda} = \lambda(t)\boldsymbol{\alpha}, |\boldsymbol{\alpha}| = 1$, где $\lambda(t)$ – непрерывная и ограниченная вместе со своей производной функция времени. Гиростаты с регулируемой угловой скоростью ротора, в том числе и с переменным гиростатическим моментом, изучали К. Магнус, В.В. Румянцев, П.В. Харламов, Й. Виттенбург.

П.В. Харламов в работах [3,4] указал некоторые более общие конструкции гиростата как механической системы, уравнения движения которой имеют вид (1). В [3] показано, что для твердого тела, несущего маховики, условие их физической и геометрической симметрии можно существенно ослабить. Пусть на теле–носителе S жестко закреплены тела S^i, i=1,2,..n, каждое из которых динамически симметрично относительно своей оси крепления, являющейся для него главной центральной осью инерции. Если относительные угловые скорости S^i – заданные функции времени либо известна составляющая момента сил, действующих на S^i со стороны S относительно их общей оси, то уравнения движения тяжелого гиростата имеют вид (1), где элементы обобщенного тензора инерции $\mathbf{J}$ определяются способом формирования гиростатического момента. Впоследствии П.В. Харламов отмечал, что система, описанная в работе [3], не исчерпывает всех возможных конструкций гиростата. В [4] показано, что несомые тела могут быть не только гироскопами Лагранжа, но и гироскопами Гесса: если закрепить в носителе центральную ось тела S^i, перпендикулярную круговому сечению гирационного эллипсоида, то момент количества движения системы относительно неподвижной точки представим в виде суммы $\mathbf{J}\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda}$, а уравнения движения сохраняют вид (1).

В классической задаче о вращении вокруг неподвижной точки тяжелого гиростата с $\boldsymbol{\lambda} = \mathrm{const}$ разными авторами исследованы основные типы движений, выписаны соответствующие частные решения уравнений (1). При произвольном переменном $\boldsymbol{\lambda}(t)$ можно реализовать любое заданное движение гиростата [5], но компоненты вектора $\boldsymbol{\lambda}(t)$ могут быть неограниченными функциями времени. В случае, когда гиростатический момент имеет фиксированное направление, соответствующая задача пока изучена слабо: при $\boldsymbol{\lambda} = \lambda(t)\boldsymbol{\alpha}$ показана допустимость только некоторых классов движения с перманентной осью вращения гиростата [6,7].

Цель настоящего исследования: выделить основные семейства допустимых движений тяжелого гиростата, описывающиеся линейными инвариантными соотношениями системы (1); явно указать соответствующую зависимость $\lambda(t)$ и выписать точные решения полученных неавтономных уравнений.

Маятниковым движением гиростата назовем вращение вокруг неподвижной оси, не являющееся стационарным либо асимптотически стационарным движением. При этом угловая скорость гиростата изменяется по закону $\boldsymbol{\omega} = \omega(t)\boldsymbol{\beta}, |\boldsymbol{\beta}| = 1$, а система (1) допускает инвариантные соотношения $(\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{\rho}_1)=0,(\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{\rho}_2)=0$, где $\boldsymbol{\rho}_1,\boldsymbol{\rho}_2\perp\boldsymbol{\beta}$. Для уравновешенного гиростата такие движения изучены Э.И. Дружининым [6], а для тяжелого – исследованы авторами в работе [8]. Система уравнений движения (1) в этом случае записывается в виде

$$\dot{\omega}\mathbf{J}\boldsymbol{\beta}=\omega^2(\mathbf{J}\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{\beta})+\lambda\omega(\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta})+\mathbf{r}\times\boldsymbol{\gamma}-\dot{\lambda}\boldsymbol{\alpha},\quad \dot{\boldsymbol{\gamma}}=\omega(\boldsymbol{\gamma}\times\boldsymbol{\beta}). \tag{3}$$

Замена $t\to\tau:\ \dot{\tau}=\omega$ на каждом интервале знакопостоянства непрерывно дифференцируемой функции $\omega(t)$ позволяет проинтегрировать кинематические уравнения системы (3): запишем $\boldsymbol{\gamma}(\tau)=\mathcal{U}\boldsymbol{\xi}(\tau)$, где

$$\mathcal{U}=\begin{pmatrix}\sqrt{\beta_2^2+\beta_3^2} & 0 & \beta_1\\ \dfrac{-\beta_1\beta_2}{\sqrt{\beta_2^2+\beta_3^2}} & \dfrac{\beta_3}{\sqrt{\beta_2^2+\beta_3^2}} & \beta_2\\ \dfrac{-\beta_1\beta_3}{\sqrt{\beta_2^2+\beta_3^2}} & \dfrac{-\beta_2}{\sqrt{\beta_2^2+\beta_3^2}} & \beta_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{(\boldsymbol{\beta}\times\mathbf{i})\times\boldsymbol{\beta}}{\|(\boldsymbol{\beta}\times\mathbf{i})\times\boldsymbol{\beta}\|}\\ \dfrac{\boldsymbol{\beta}\times\mathbf{i}}{\|\boldsymbol{\beta}\times\mathbf{i}\|}\\ \boldsymbol{\beta}\end{pmatrix}^T,\quad \mathbf{i}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \tag{4}$$

$$\boldsymbol{\xi}(\tau)=(\sin\mu\sin(\tau+\phi_0),\sin\mu\cos(\tau+\phi_0),\cos\mu),\quad \mu,\phi_0=\text{const}. \tag{5}$$

Начальную фазу положим нулевой: $\phi_0=0$. Очевидно, что $|\boldsymbol{\xi}|=1$ и $\forall\boldsymbol{\eta}$ имеем $(\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\eta})=(\boldsymbol{\xi},\mathcal{U}^T\boldsymbol{\eta})$. В [8] показано, что $\omega(\tau)$ удовлетворяет неоднородному дифференциальному уравнению

$$\mathrm{A}(\omega^2)'_\tau=\mathrm{B}\omega^2+2(\boldsymbol{\xi}(\tau),\mathcal{U}^T\boldsymbol{\zeta}) \tag{6}$$

с общим решением

$$\omega^2(\tau)=\omega_0\exp\frac{\mathrm{B}}{\mathrm{A}}(\tau-\tau_0)-\frac{2\mathrm{A}}{\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2}(\mathcal{U}\boldsymbol{\xi}(\tau),\,\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{\zeta}+\mathrm{A}^{-1}\mathrm{B}\boldsymbol{\zeta}+\mathrm{AB}^{-1}(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\zeta})\boldsymbol{\beta}), \tag{7}$$

где параметры A, B и $\boldsymbol{\zeta}$ введены следующим образом:

$$\mathrm{A}=(\mathbf{J}\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta}),\quad \mathrm{B}=2(\mathbf{J}\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha})(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}),\quad \boldsymbol{\zeta}=(\boldsymbol{\alpha}\times(\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta}))\times\mathbf{r}.$$

Дальнейшее исследование условий разрешимости динамических уравнений системы (3) относительно $\lambda(\tau)$ показало, что маятниковые движения гиростата возможны вокруг вертикальной, горизонтальной (как главной, так и не главной) и наклонных осей. Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Маятниковые движения тяжелого гиростата ($\mathbf{r}\neq0$) с гиростатическим моментом $\boldsymbol{\lambda}=\lambda(t)\boldsymbol{\alpha}$ возможны тогда и только тогда, когда параметры, характеризующие распределение масс гиростата и начальные условия движения, удовлетворяют хотя бы одному из следующих наборов условий:*

- $\boldsymbol{\alpha}\parallel\mathbf{J}\boldsymbol{\beta},\ \boldsymbol{\beta}\parallel\mathbf{r}\parallel\boldsymbol{\gamma}$;

- $\boldsymbol{\alpha} \parallel \mathbf{J}\boldsymbol{\beta} \parallel \boldsymbol{\beta} \perp \mathbf{r}, \quad \boldsymbol{\gamma} \perp \boldsymbol{\beta};$
- $\boldsymbol{\alpha} \parallel \mathbf{J}\boldsymbol{\beta} \perp \mathbf{r}, \ \ |\mathbf{J}\boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{\beta}| \neq 0, \ (\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\beta}, \mathbf{r}) = 0, \ (\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\beta})^2 > (\mathbf{r}, \boldsymbol{\beta})^2 > 0;$
- $|\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{J}\boldsymbol{\beta}||\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\beta}||\mathbf{J}\boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{\beta}| \neq 0, \quad \boldsymbol{\gamma} \perp \boldsymbol{\beta} \perp \mathbf{r}, \quad (\mathbf{J}\boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}) = 0.$

При условиях 1–3 допустимые оси вращения существуют всегда. Набор условий 4 в случае, когда $\boldsymbol{\alpha}$ не принадлежит главной плоскости эллипсоида инерции, требует дополнительного ограничения

$$\left[(J_2 - J_3)\alpha_1 r_1 + (J_3 - J_1)\alpha_2 r_2 + (J_2 - J_1)\alpha_3 r_3\right]^2 + 4\alpha_1\alpha_2 r_1 r_2 (J_2 - J_3)(J_1 - J_3) \geq 0 .$$

Отметим, что гиростат с постоянным $\boldsymbol{\lambda}$ может совершать маятниковое вращение только вокруг горизонтальной главной оси, что соответствует набору условий 2.

При $\lambda(t) \neq \mathrm{const}$ первые два набора условий Теоремы 1 обеспечивают существование решений системы (1) с произвольной функцией $\omega(t)$. Здесь будут приведены нетривиальные решения, соответствующие наборам условий 3 и 4.

Итак, пусть выполнены условия 3, то есть ось вращения составляет с вертикалью меньший угол, чем с осью, содержащей центр масс. Тогда

$$\omega = \left[g(\boldsymbol{\beta}, \mathbf{r})\right]^{-1} (\boldsymbol{\gamma}(\tau), \boldsymbol{\alpha})^2, \ \lambda = -(\mathbf{J}\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha})\omega + g(\boldsymbol{\gamma}(\tau), \boldsymbol{\alpha})^{-1},$$

где g – константа интеграла (2); $\tau = \arccos \kappa$, $\kappa = \kappa(t)$ – неявно заданная периодическая функция с периодом $T = 2\pi c^{-1} a (a^2 - 1)^{-3/2}$:

$$t - t_0 = \frac{ac}{\sqrt{(a^2 - 1)^3}} \left[\frac{\sqrt{1 - \kappa^2}\sqrt{a^2 - 1}}{a(\kappa + a)} + \arcsin \frac{a\kappa + 1}{\kappa + a} \right],$$

$$|a| = \left| \frac{\operatorname{ctg}\langle \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\beta} \rangle}{\operatorname{ctg}\langle \mathbf{r}, \boldsymbol{\beta} \rangle} \right| > 1,$$

$$c = \sin^2\mu \left[(\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\beta})_1^2 + (\alpha_1 - (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})\beta_1)^2 \right] \left[g(\mathbf{r}, \boldsymbol{\beta})(\beta_2^2 + \beta_3^2) \right]^{-1} \neq 0.$$

При этом $(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\alpha}) \neq 0$ и функция $\lambda(\tau)$ ограничена. Поскольку $\omega(\tau)$ сохраняет знак, то гиростат будет совершать неравномерное вращение вокруг неглавной наклонной оси в одном направлении, определенном начальными условиями.

Набор условий 4 обеспечивает возможность маятниковых вращений гиростата вокруг неглавной горизонтальной оси. В этом случае суммарный кинетический момент $\omega\mathbf{J}\boldsymbol{\beta} + \lambda\boldsymbol{\alpha}$ направлен вдоль перманентной оси и константа $g = 0$. Зависимость $\lambda(\omega)$ имеет вид $\lambda = -(\mathbf{J}\boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\beta})(\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\beta})^{-2}\omega$; система (4) допускает аналог интеграла энергии $A\boldsymbol{\omega}^2 + 2(\mathbf{r}, \boldsymbol{\gamma}) = 2h$, где $A = (\mathbf{J}\boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\beta}) \neq 0.$

При различных значениях постоянной h зависимость $\omega(t)$ выражается с помощью эллиптических функций Якоби следующим образом:

$$|h|<1: \qquad \omega(t) = c\sqrt{2(1+\varepsilon h)}\operatorname{cn}(c(t-t_0);k), \qquad k=\sqrt{(1+\varepsilon h)/2};$$

$$|h|>1: \qquad \omega(t) = c\sqrt{2(1+\varepsilon h)}\operatorname{dn}\Big(\frac{c(t-t_0)}{k};k\Big), \qquad k=\sqrt{2/(1+\varepsilon h)};$$

$$|h|=1: \qquad \omega(t) = 2c\varepsilon\operatorname{ch}^{-1}c(t-t_0); \qquad \varepsilon=\pm 1,\ c=|A|^{-1/2}.$$

Отметим ограничения: при $h>1$ всегда $\varepsilon=1$, а при $h<-1$ $\varepsilon=-1$. Первому решению соответствует колебательное движение гиростата. Второе решение определяет неравномерное вращение в одну и ту же сторону. При $h=\pm 1$ движение происходит по сепаратрисе: гиростат при $t\to\infty$ стремится к состоянию покоя, причем вектор $\mathbf{r}$ в пределе занимает вертикальное положение.

Немаятниковые решения с двумя инвариантными соотношениями. Исследуется задача о движении неавтономного гиростата с $\boldsymbol{\lambda}=\lambda(t)\boldsymbol{\alpha}$ в случае, когда компоненты вектора $\boldsymbol{\omega}$ связаны двумя независимыми линейными инвариантными соотношениями вида

$$(\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{\beta}_1)=c,\ \ (\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{\beta}_2)=0, \quad \text{где}\ \ |\boldsymbol{\beta}_1|=|\boldsymbol{\beta}_2|=1,\ \ c\neq 0. \tag{8}$$

Тогда для угловой скорости справедливо разложение $\boldsymbol{\omega}=c\boldsymbol{\beta}_1+\omega(t)(\boldsymbol{\beta}_1\times\boldsymbol{\beta}_2)$. Так как равномерные вращения здесь не рассматриваются, положим $\omega(t)\neq\mathrm{const}$.

Показано, что для *уравновешенного* гиростата класс допустимых движений, характеризующихся соотношениями (8), исчерпывается движениями с перманентной осью вращения. Найдены новые семейства решений задачи о движении *тяжелого* гиростата.

Обозначим через $\mathbf{K}$ суммарный кинетический момент $\mathbf{J}\boldsymbol{\omega}+\lambda\boldsymbol{\alpha}$. Из (8) следует, что должно выполняться, по крайней мере, одно соотношение вида $(\mathbf{K},\boldsymbol{\xi})=\mathrm{const}$:

$$(\mathbf{K},\boldsymbol{\sigma})=c(\mathbf{J}\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\sigma}) \quad \text{при} \quad \boldsymbol{\sigma}=\mathbf{J}(\boldsymbol{\beta}_1\times\boldsymbol{\beta}_2)\times\boldsymbol{\alpha}\neq 0 \quad \text{и}$$

$$(\mathbf{K},\boldsymbol{\upsilon})=c(\mathbf{J}\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\upsilon}),\ \ (\mathbf{K},\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\upsilon})=c(\mathbf{J}\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\upsilon}) \quad \text{при} \quad \boldsymbol{\upsilon}\perp\mathbf{J}(\boldsymbol{\beta}_1\times\boldsymbol{\beta}_2)\parallel\boldsymbol{\alpha}.$$

Исследован случай, когда проекция $\mathbf{K}$ на барицентрическую ось постоянна: указаны три семейства решений, на которых выполняется $(\mathbf{K},\mathbf{r})=\mathrm{const}$. Показано, что необходимыми для существования таких решений являются условия $(\mathbf{K},\boldsymbol{\beta}_2)=0$ и $\mathbf{r}\perp\boldsymbol{\beta}_2$.

Введем $\tau:\ \dot\tau=(\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\beta}_2)$. Тогда $(\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\beta}_1\times\boldsymbol{\beta}_2)=-c\tau$, $(\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\beta}_1)=\int\omega(\tau)d\tau$ и

$$\dot\tau=\pm\sqrt{1-c^2\tau^2-\Big(\int\omega(\tau)d\tau\Big)^2}. \tag{9}$$

Зависимость $\omega(\tau)$ имеет разную форму при различных условиях на параметры:

1) $\boldsymbol{\alpha} \perp \mathbf{r} \perp \boldsymbol{\beta}_2 \| \mathbf{J}\boldsymbol{\beta}_2 \perp \boldsymbol{\alpha} \| \mathbf{J}(\boldsymbol{\beta}_1 \times \boldsymbol{\beta}_2)$;

$\lambda = -(\mathbf{J}(\boldsymbol{\beta}_1 \times \boldsymbol{\beta}_2), \boldsymbol{\alpha})\omega + (\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}, \boldsymbol{\beta}_2)\tau + \lambda_0$; функция $\omega(\tau)$ задается уравнением

$$[(\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}, \boldsymbol{\beta}_2)\tau + \lambda_0](\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\omega}) + \mathrm{c}(\mathbf{J}\boldsymbol{\beta}_1 \times \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\omega}) = (\mathbf{r}, \boldsymbol{\beta}_1 \times \boldsymbol{\beta}_2)\int \omega(\tau)\mathrm{d}\tau + (\mathbf{r}, \boldsymbol{\beta}_1)\mathrm{c}\tau,$$

откуда при $(\mathbf{r}, \boldsymbol{\beta}_1 \times \boldsymbol{\beta}_2) \neq 0$ получаем

$$\omega(\tau) = \frac{\omega_0}{\left[\lambda_0(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}_1) + \mathrm{c}(\mathbf{J}\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_1) - \tau(\mathbf{r}, \boldsymbol{\beta}_1 \times \boldsymbol{\beta}_2)\right]^2} - \frac{\mathrm{c}(\mathbf{r}, \boldsymbol{\beta}_1)}{(\mathbf{r}, \boldsymbol{\beta}_1 \times \boldsymbol{\beta}_2)}, \quad \text{где}$$

$$\lambda_0, \omega_0 = \mathrm{const}.$$

Если $\mathbf{r} \perp \boldsymbol{\beta}_1 \times \boldsymbol{\beta}_2$, то $\omega(\tau)$ – линейная функция τ. Справедливое в данном случае условие $\mathbf{r} \| \boldsymbol{\beta}_1 \| \mathbf{J}\boldsymbol{\beta}_1$ позволяет выписать простую зависимость $\lambda = (\mathrm{J}_1 - 2\mathrm{J}_3)\tau / \mathrm{J}_1 + \tilde{\lambda}_0$, где $\tau(\mathrm{t})$ – эллиптическая функция, а $\tilde{\lambda}_0 = \mathrm{const}$. Положив $\mathrm{J}_1 = 2\mathrm{J}_3$ и $\tilde{\lambda}_0 = 0$, получаем известное решение Бобылева – Стеклова.

2) $\mathbf{r} \| \boldsymbol{\beta}_1$, $\boldsymbol{\beta}_2 \| \mathbf{J}\boldsymbol{\beta}_2 \perp \boldsymbol{\alpha}$, $(\mathbf{J}\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_1 \times \boldsymbol{\beta}_2)(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{r})\left|\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{J}(\boldsymbol{\beta}_1 \times \boldsymbol{\beta}_2)\right| \neq 0$;

$$\lambda(\tau) = \frac{-(\mathbf{J}\mathbf{r}, \boldsymbol{\beta}_1 \times \boldsymbol{\beta}_2)\tau + \lambda_0}{(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\beta}_2)}, \quad \omega(\tau) = \frac{(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{r})\tau + \omega_0}{(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\beta}_2)}, \quad \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{J}(\boldsymbol{\beta}_1 \times \boldsymbol{\beta}_2) \times \boldsymbol{\alpha}.$$

3) $\mathbf{r} \| \boldsymbol{\beta}_1 \perp (\boldsymbol{\sigma} \times \boldsymbol{\beta}_2)$, $2(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\beta}_1) = -(\mathbf{J}\boldsymbol{\beta}_1 \times \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}_1 \times \boldsymbol{\beta}_2) \neq 0$, $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}_2) \neq 0$;

$$\lambda(\tau) = \frac{(\mathbf{J}\boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_1 \times \boldsymbol{\beta}_2)(\mathbf{r}, \boldsymbol{\beta}_1)\tau + \lambda_0}{(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\beta}_1)}, \quad \omega(\tau) = \frac{-(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}_2)(\mathbf{r}, \boldsymbol{\beta}_1)\tau + \omega_0}{(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\beta}_1)}.$$

В случаях 2),3) константы λ_0, ω_0 не произвольны, они однозначно определяются параметрами гиростата и инвариантными соотношениями (8). Поскольку $\omega(\tau)$ линейна по τ, уравнение (9) интегрируется в эллиптических функциях.

Получены аналоги решений 1)–3) в задаче с одним линейным инвариантным соотношением $(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\beta}) = 0$ и условиями $(\mathbf{K}, \mathbf{r}) = \mathrm{const}$, $(\mathbf{K}, \boldsymbol{\beta}) = 0$, $\mathbf{r} \perp \boldsymbol{\beta}$. Квадратуры для определения $\tau(\mathrm{t})$ в общем случае гиперэллиптические. Зависимость $\lambda(\tau)$ представима в виде $\lambda = \mathrm{a}_0 + \mathrm{a}_1\tau + \mathrm{a}_2\tau^{-2}$, и вопрос об ограниченности функции $\lambda(\mathrm{t})$ пока остается открытым.

Регулярной прецессией гиростата называют безнутационное движение, при котором скорости прецессии $\dot{\psi}$ и собственного вращения $\dot{\varphi}$ постоянны: $\dot{\psi} = \mathrm{m}$, $\dot{\varphi} = \mathrm{n}$, $\mathrm{mn} \neq 0$. Тогда угловая скорость тела S представима в виде $\boldsymbol{\omega} = \mathrm{m}\boldsymbol{\nu} + \mathrm{n}\boldsymbol{\beta}$, где единичные векторы $\boldsymbol{\nu}$ и $\boldsymbol{\beta}$ фиксированы в абсолютном и относительном базисах соответственно. Считаем, что $\mathrm{mn} > 0$.

При таких условиях система (1) допускает линейное инвариантное соотношение $(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\beta}) = \mathrm{m}\cos\mu + \mathrm{n}$ где $\mu \neq 0$ – постоянный угол нутации. Динамическое уравнение системы (1) принимает вид

$$\mathrm{m}\mathbf{J}\dot{\mathbf{v}} + \dot{\lambda}\boldsymbol{\alpha} = \mathrm{m}^2(\mathbf{J}\mathbf{v}\times\mathbf{v}) + \mathrm{mn}(\mathbf{J}\boldsymbol{\beta}\times\mathbf{v} + \mathbf{J}\mathbf{v}\times\boldsymbol{\beta}) + \mathrm{n}^2(\mathbf{J}\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{\beta}) + \lambda(\boldsymbol{\alpha}\times(\mathrm{m}\mathbf{v} + \mathrm{n}\boldsymbol{\beta})) + \mathbf{r}\times\boldsymbol{\gamma} \tag{10}$$

Пусть орт вертикали $\boldsymbol{\gamma}$ составляет с осью прецессии угол $\chi : \cos\chi = (\mathbf{v}, \boldsymbol{\gamma})$. Постоянные векторы $\boldsymbol{\gamma}$ и $\mathbf{v}$ в относительном базисе удовлетворяют уравнениям

$$\dot{\boldsymbol{\gamma}} = \mathrm{n}(\boldsymbol{\gamma}\times\boldsymbol{\beta}) + \mathrm{m}(\boldsymbol{\gamma}\times\mathbf{v}), \quad \dot{\mathbf{v}} = \mathrm{n}(\mathbf{v}\times\boldsymbol{\beta}). \tag{11}$$

Решение последнего из уравнений (11) запишем в виде $\mathbf{v}(\mathrm{t}) = \mathcal{U}\boldsymbol{\xi}(\mathrm{t})$, где $\mathcal{U}$ определена в (4), а $\boldsymbol{\xi}(\mathrm{t}) = (\sin\mu\sin\mathrm{nt}, \sin\mu\cos\mathrm{nt}, \cos\mu)$.

С учетом вышеизложенного получаем разложение $\boldsymbol{\gamma}$ по векторам $\mathbf{v}, \boldsymbol{\beta}, \mathbf{v}\times\boldsymbol{\beta}$:

$$\boldsymbol{\gamma} = [\cos\chi + \frac{\sin\chi}{\sin\mu}\cos\mu\sin(\mathrm{mt}+\varphi_0)]\mathbf{v} - \frac{\sin\chi}{\sin\mu}[\sin(\mathrm{mt}+\varphi_0)\boldsymbol{\beta} + \cos(\mathrm{mt}+\varphi_0)\,\mathbf{v}\times\boldsymbol{\beta}], \tag{12}$$

где φ_0 – произвольная постоянная, подлежащая определению из условий существования прецессионных движений.

Регулярные прецессии вокруг оси, произвольным образом расположенной в неподвижном пространстве, полностью изучены в [9] как для тяжелого, так и для уравновешенного гиростата. Здесь будут приведены результаты, полученные в предположении $\mathbf{r} \neq 0$. В случае, когда $\mathbf{v} = \boldsymbol{\gamma}$, справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Если тяжелый гиростат с гиростатическим моментом* $\boldsymbol{\lambda} = \lambda(\mathrm{t})\boldsymbol{\alpha}$ *совершает регулярную прецессию вокруг вертикали, то его центр масс принадлежит оси собственного вращения* $(\mathbf{r}\,\|\,\boldsymbol{\beta})$ *и выполняются условия*

$$\alpha_1 = \beta_1 = 0, \quad (\mathrm{J}_3 - \mathrm{J}_1)\alpha_2\beta_2 + (\mathrm{J}_2 - \mathrm{J}_1)\alpha_3\beta_3 = 0. \tag{13}$$

При этом только в трех следующих случаях

(I) $\boldsymbol{\alpha}\perp\boldsymbol{\beta}, \quad \mathbf{J}\boldsymbol{\beta}\,\|\,\boldsymbol{\beta} : \ \alpha_2 = \beta_3 = 0, \quad (\mathrm{J}_1 - \mathrm{J}_3) \neq 0$;

(II) $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})\left|\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta}\right|\left|\mathbf{J}\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{\beta}\right| \neq 0 : \ (\mathrm{J}_2 - \mathrm{J}_3)(\mathrm{J}_2\beta_3^2 + \mathrm{J}_3\beta_2^2 - \mathrm{J}_1) \neq 0$;

(III) $\boldsymbol{\alpha}\,\|\,\boldsymbol{\beta} : \ \beta_2^2 = (\mathrm{J}_2 - \mathrm{J}_1)(\mathrm{J}_2 - \mathrm{J}_3)^{-1}, \ \beta_3^2 = (\mathrm{J}_1 - \mathrm{J}_3)(\mathrm{J}_2 - \mathrm{J}_3)^{-1}$

существует такая непрерывная ограниченная функция $\lambda(\mathrm{t}) \neq \mathrm{const}$ *(которая оказывается также и периодической), что* $\boldsymbol{\gamma}(\mathrm{t}) = \mathcal{U}\boldsymbol{\xi}(\mathrm{t})$ *удовлетворяет уравнению (10) при некоторых дополнительных условиях на соотношение между скоростями* m *и* n.

В случаях (I) и (II) зависимость $\lambda(\mathrm{t})$ имеет вид

$$\lambda(\mathrm{t}) = (\mathbf{J}(\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{\alpha}) + \mathbf{J}\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{\alpha})(\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{\alpha})^{-2}\left[\mathrm{m}(\boldsymbol{\gamma}(\mathrm{t}),\boldsymbol{\alpha}) + \mathrm{n}(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})\right],$$

m и n связаны между собой квадратным уравнением

$$m^2 \cos\mu\,(\mathbf{J\beta}\times\boldsymbol{\alpha} - \mathbf{J}(\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{\alpha}), \boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{\alpha}) + mn(\mathbf{J\beta}\times\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{\alpha}) + (\mathbf{r},\boldsymbol{\beta})(\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{\alpha})^2 = 0.$$

Случай (III) соответствует условиям Гриоли, которые для гиростата с $\boldsymbol{\lambda} = \mathrm{const}$ обеспечивают возможность регулярной прецессии вокруг наклонной оси. Если же $\boldsymbol{\lambda} \neq \mathrm{const}$, то

$$\lambda(t) = -m(\boldsymbol{\gamma}(t), \mathbf{J\beta}) - n(J_2 + J_3) - (\mathbf{r},\boldsymbol{\beta})/m,$$

$$m\cos\mu + n = (\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{\beta}) = 0, \quad g = mJ_1 - \cos\mu(\mathbf{r},\boldsymbol{\beta})/m.$$

В [9] также рассмотрен случай $|\mathbf{v}\times\boldsymbol{\gamma}| \neq 0$, описаны три типа допустимых регулярных прецессий тяжелого гиростата вокруг наклонной оси. Доказана

Теорема 3. *Тяжелый гиростат с гиростатическим моментом* $\boldsymbol{\lambda} = \lambda(t)\boldsymbol{\alpha}$ *может совершать регулярную прецессию вокруг наклонной оси только при одновременном выполнении условий*

$$\mathbf{r} \parallel \boldsymbol{\beta}, \quad \mathbf{v} \perp \boldsymbol{\beta}, \quad (\mathbf{J}(\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{\alpha})\times(\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{\alpha}), \boldsymbol{\beta}) = 0. \tag{14}$$

Допустимые скорости прецессии и собственного вращения связаны соотношением $(m-n)(m-2n) = 0$, *причем равенство* $m = 2n$ *возможно тогда и только тогда, когда* $\boldsymbol{\alpha} \parallel \boldsymbol{\beta}$. *Функция* $\lambda(t)$ *при этом – полином соответственно 1-й или 2-й степени относительно* $\cos nt, \sin nt$.

Угол χ наклона оси прецессии зависит от взаимного расположения векторов $\boldsymbol{\alpha}$ и $\boldsymbol{\beta}$ и вместе с условиями допустимости движения будет выписан отдельно.

А) При $m = 2n$ существует единственное решение, характеризующееся условиями $\boldsymbol{\alpha} \parallel \boldsymbol{\beta} \parallel \mathbf{J\beta} \parallel \mathbf{r} \perp \mathbf{v}$. Пусть $\boldsymbol{\beta} = (0,0,1)^T$, $J_1 \neq J_2$,

$$\lambda(t) = n[(J_2 - J_1)\cos 2nt - J_3] - (2n)^{-1} r_3 \cos\chi.$$

Угол χ задается равенством $\sin\chi = 2n^2(J_1 - J_2)/r_3$. Скорость вращения n не зависит от параметров гиростата и ограничена только неравенством $|\sin\chi| \leq 1$. Уравнения движения (1) при указанной зависимости $\boldsymbol{\lambda}$ от t имеют решение

$$\omega_1 = 2n\sin nt, \quad \omega_2 = 2n\cos nt, \quad \omega_3 = n,$$

$$\gamma_1 = \cos\chi\sin nt + \sin\chi\cos nt\sin 2nt, \quad \gamma_2 = \cos\chi\cos nt - \sin\chi\sin nt\sin 2nt,$$

$$\gamma_3 = -\sin\chi\cos 2nt.$$

Отметим, что для гиростата с *постоянным* $\boldsymbol{\lambda}$ регулярные прецессии вокруг наклонной оси возможны только при $m = n$ [10, §3.1].

Теперь рассмотрим случай $m = n$, $\boldsymbol{\alpha} \nparallel \boldsymbol{\beta}$. Прецессию реализует функция

$$\lambda(t) = \zeta(\boldsymbol{\omega}(t), \boldsymbol{\alpha}) = \zeta n\big[(\mathbf{v}(t), \boldsymbol{\alpha}) + (\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})\big], \tag{15}$$

где $\zeta = \left[(\mathbf{J}(\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{\alpha}),\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{\alpha}) - (\mathbf{J}(\boldsymbol{\beta}\times(\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{\alpha})),\boldsymbol{\beta}\times(\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{\alpha}))\right](\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{\alpha})^{-4}$.

Если выполнено $(\mathbf{J}\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha})^2 + \left[\zeta(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}) + (\mathbf{J}\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta})(\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta})^{-2}\right]^2 \neq 0$ и $\zeta \neq 0$, то гиростат может совершать регулярную прецессию вокруг оси, составляющей с вертикалью угол χ такой, что $\cos\chi = -n^2[\zeta(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})^2 + (\mathbf{J}\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta})](\mathbf{r},\boldsymbol{\beta})^{-1} \neq \pm 1$. Скорость прецессии зависит от параметров гиростата и направления $\boldsymbol{\beta}$. Отдельно выделим случай, когда $\boldsymbol{\alpha}$ и $\boldsymbol{\beta}$ лежат в одной главной плоскости эллипсоида инерции.

B) При $\mathbf{J}(\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{\alpha}) \parallel \boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{\alpha}$ получаем решение, которое в случае $\lambda(t) = 0$ соответствует известному решению Дж. Гриоли уравнений движения твердого тела.

Пусть $\alpha_1 = \beta_1 = 0$, $(\mathrm{J}_1 - \mathrm{J}_2\beta_3^2 - \mathrm{J}_3\beta_2^2)\left[(\mathrm{J}_3 - \mathrm{J}_1)\alpha_2\beta_2 + (\mathrm{J}_2 - \mathrm{J}_1)\alpha_3\beta_3\right] \neq 0$, $\lambda(t) = n\zeta\left[(\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta})_1 \cos nt + (\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})\right]$, где $\zeta = (\mathrm{J}_1 - \mathrm{J}_2\beta_3^2 - \mathrm{J}_3\beta_2^2)/(\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta})^2$.

Тогда тяжелый гиростат может совершать регулярную прецессию с параметрами

$$\sin\chi = \frac{n^2}{(\mathbf{r},\boldsymbol{\beta})}\frac{(\mathrm{J}_3 - \mathrm{J}_1)\alpha_2\beta_2 + (\mathrm{J}_2 - \mathrm{J}_1)\alpha_3\beta_3}{(\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta})_1},$$

$$n^4 = |\mathbf{r}|^2\left(\zeta^2(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})^2 + 2\zeta(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})(\mathbf{J}\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}) + |\mathbf{J}\boldsymbol{\beta}|^2\right)^{-1}.$$

Константа φ_0 в (12) равна $\pi/2$; точные решения уравнений (1) записываются в виде

$$\omega_1 = n\sin nt,\quad \omega_2 = n(\beta_2 + \beta_3\cos nt),\quad \omega_3 = n(\beta_3 - \beta_2\cos nt),$$

$$\gamma_1 = \sin nt(\cos\chi + \sin\chi\cos nt),\quad \gamma_2 = \cos nt(\beta_3\cos\chi - \beta_2\sin\chi) - \beta_3\sin\chi\sin^2 nt,$$

$$\gamma_3 = -\cos nt(\beta_2\cos\chi + \beta_3\sin\chi) + \beta_2\sin\chi\sin^2 nt.$$

C) При $\mathbf{J}(\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{\alpha}) \nparallel \boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{\alpha}$ регулярные прецессии также возможны. Приведем здесь семейство решений, соответствующее значению $\varphi_0 = 0$ в разложении (12): пусть $\mathrm{J}_2 = \mathrm{J}_3 \neq \mathrm{J}_1$, $\alpha_1 = (\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}) = 0$, $(\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta})_1\beta_1 \neq 0$. Тогда периодическая функция

$$\lambda(t) = n(\mathrm{J}_1 - \mathrm{J}_2)\sqrt{\beta_2^2 + \beta_3^2}\,(\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta})_1\cos nt$$

реализует прецессию с параметрами

$$\cos\chi = -(\mathbf{J}\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta})|\mathbf{J}\boldsymbol{\beta}|^{-1},\quad n^2 = |\mathbf{r}||\mathbf{J}\boldsymbol{\beta}|^{-1}.$$

Уравнения (1) в этом случае имеют решение $(\boldsymbol{\omega}(t),\boldsymbol{\gamma}(t))$, где $\boldsymbol{\omega}(t) = n(\boldsymbol{\nu}(t) + \boldsymbol{\beta})$,

$$\nu_1 = \sqrt{\beta_2^2+\beta_3^2}\sin \mathrm{nt}, \quad \nu_2 = \frac{\beta_3\cos \mathrm{nt} - \beta_1\beta_2\sin \mathrm{nt}}{\sqrt{\beta_2^2+\beta_3^2}}, \quad \nu_3 = \frac{-\beta_2\cos \mathrm{nt} - \beta_1\beta_3\sin \mathrm{nt}}{\sqrt{\beta_2^2+\beta_3^2}},$$

а $\boldsymbol{\gamma}(\mathrm{t})$ удовлетворяет разложению (12) с $\cos\mu = 0$.

Точные решения при условиях Лагранжа и Гесса. Изучены условия существования линейного инвариантного соотношения

$$(\mathbf{J\omega},\mathbf{r}) + \lambda(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{r}) = \mathrm{c}, \quad (\boldsymbol{\alpha} \perp \mathbf{r}). \tag{16}$$

В случае, когда гиростатический момент $\lambda(\mathrm{t})\boldsymbol{\alpha}$ направлен вдоль вектора $\mathbf{Jr}$, указаны точные решения уравнений (1), соответствующие классическим интегрируемым случаям задачи о движении гиростата с постоянным $\boldsymbol{\lambda}$. Показано, что если распределение масс гиростата удовлетворяет условиям Гесса

$$\mathrm{r}_1^2 = \frac{(\mathrm{J}_3-\mathrm{J}_1)\mathrm{J}_2}{(\mathrm{J}_2-\mathrm{J}_1)\mathrm{J}_3}, \ \mathrm{r}_2^2 = \frac{(\mathrm{J}_2-\mathrm{J}_3)\mathrm{J}_1}{(\mathrm{J}_2-\mathrm{J}_1)\mathrm{J}_3}, \ \mathrm{r}_3 = 0 \quad (\mathrm{J}_1 < \mathrm{J}_3 < \mathrm{J}_2) \tag{17}$$

и ограничениям $\alpha_3 = 0$, $\mathrm{J}_1\mathrm{r}_1\alpha_2 = \mathrm{J}_2\mathrm{r}_2\alpha_1$, то система (1) допускает инвариантное соотношение, обобщающее частный интеграл Гесса – Сретенского

$$(\mathrm{J}_1\omega_1 + \alpha_1\lambda)\mathrm{r}_1 + (\mathrm{J}_2\omega_2 + \alpha_2\lambda)\mathrm{r}_2 = 0.$$

При дополнительном к (17) условии $\mathbf{Jr}\,\|\,\mathbf{r}$ получаем случай Лагранжа

$$\mathrm{J}_2 = \mathrm{J}_3 = \mathrm{J}, \quad \mathrm{r}_2 = \mathrm{r}_3 = 0, \quad \alpha_2 = \alpha_3 = 0. \tag{18}$$

Причем, если выполнено (18), то (16) содержит произвольную постоянную c:

$$\mathrm{J}_1\omega_1 + \alpha_1\lambda \equiv c\mathrm{J}, \quad \alpha_1 = \pm 1.$$

Для наборов условий (17)–(18) решение задачи можно представить в единой форме. Введем новые переменные по формулам

$$\mathrm{x}_1 = (\mathbf{r},\boldsymbol{\omega}), \quad \mathrm{x}_2 = (\mathbf{r}\times\boldsymbol{\omega})_3, \quad \mathrm{x}_3 = \omega_3, \quad \mathrm{y}_1 = (\mathbf{r},\boldsymbol{\gamma}), \quad \mathrm{y}_2 = (\mathbf{r}\times\boldsymbol{\gamma})_3, \quad \mathrm{y}_3 = \gamma_3.$$

С учетом зависимости λ от ω_1 система уравнений (1) переписывается в виде

$$\dot{\mathrm{x}}_2 = (\mathrm{x}_1 - \mathrm{c})\mathrm{x}_3 - \mathrm{y}_3/\mathrm{J}, \quad \dot{\mathrm{x}}_3 = (\mathrm{c}-\mathrm{x}_1)\mathrm{x}_2 + \mathrm{y}_2/\mathrm{J}, \quad \dot{\mathbf{y}} = \mathbf{y}\times\mathbf{x}.$$

Полученная система допускает первые интегралы

$$\mathrm{x}_2^2 + \mathrm{x}_3^2 - 2\mathrm{y}_1/\mathrm{J} = \mathrm{h}, \quad \mathrm{x}_2\mathrm{y}_2 + \mathrm{x}_3\mathrm{y}_3 + c\mathrm{y}_1 = \mathrm{g}, \quad |\mathbf{y}|^2 = 1,$$

причем зависимость $\mathrm{y}_1(\mathrm{t})$ определяется дифференциальным уравнением

$$\dot{\mathrm{y}}_1^2 = (1-\mathrm{y}_1^2)(\mathrm{h} + 2\mathrm{y}_1/\mathrm{J}) - (\mathrm{g} - c\mathrm{y}_1)^2,$$

которое интегрируется в эллиптических функциях.

В полярных координатах

$$\mathrm{x}_2 = \mathrm{x}\cos\varphi, \ \mathrm{x}_3 = \mathrm{x}\sin\varphi, \ \mathrm{y}_2 = \mathrm{y}\cos\psi, \ \mathrm{y}_3 = \mathrm{y}\sin\psi, \text{ где } \mathrm{x},\mathrm{y} \ge 0, \ \varphi,\psi \in [0;2\pi).$$

Тогда

$$x(t)=\sqrt{h+2y_1(t)/J},\quad y(t)=\sqrt{1-y_1^2(t)},$$

$$\cos(\varphi(t)-\psi(t))=\frac{g-cy_1(t)}{x(t)y(t)},\quad \dot{\varphi}(t)=c-x_1(t)+\frac{g-cy_1(t)}{Jh+2y_1(t)},$$

где $x_1(t)$ – произвольная функция времени.

Выводы. Таким образом, для гиростата с фиксированным направлением переменного гиростатического момента полностью изучены наиболее простые и важные для практических приложений типы движения: маятниковые вращения и регулярные прецессии. Указана зависимость λ от времени, выписаны соответствующие точные решения уравнений (1). Найдены и другие семейства точных решений с линейными по компонентам угловой скорости инвариантными соотношениями. В частности, приведено решение, при отсутствии гиростатического момента соответствующее решению Бобылева – Стеклова. Решена задача о движении тяжелого гиростата с $\boldsymbol{\lambda}=\lambda(t)\boldsymbol{\alpha}\parallel\mathbf{Jr}$ в случае, когда распределение масс удовлетворяет условиям Лагранжа или Гесса.

ЛИТЕРАТУРА

1. Levi–Civita T., Amaldi U. Lezioni di Meccanica Razionale. – Bologna: Zanichelli.– 1927. – v. 2, Pt 2.
2. Volterra V. Sur la théorie des variations des latitudes // Acta math. – 1899. – v.22. – P. 201–357.
3. Харламов П.В. Об уравнениях движения системы твердых тел // Механика твердого тела. – 1972. – Вып. 4. – С. 52–73.
4. Харламов П.В. Гіростати // Допов. АН УРСР. Сер. А. – 1988. – № 9. – С. 37–40.
5. Кейс И.А. О движении гиростата, закрепленного в одной неподвижной точке // Вестн. МГУ. Сер. Математика, механика. – 1964. – №1. – С. 76–79.
6. Дружинин Э.И. О перманентных вращениях уравновешенного неавтономного гиростата // Прикл. математика и механика. – 1999. – 63, вып. 5. – С. 825–826.
7. Ковалева Л.М., Позднякович А.Е. Равномерные вращения вокруг наклонной оси твердого тела с одним маховиком // Механика твердого тела. – 2000. – Вып. 30. – С. 100–105.
8. Волкова О.С., Гашененко И.Н. Маятниковые вращения тяжелого гиростата с переменным гиростатическим моментом // Механика твердого тела. – 2009. – Вып. 39. – С. 42–49.
9. Волкова О.С. Регулярные прецессии гиростата с неподвижной точкой в поле силы тяжести // Механика твердого тела, НАН Украины. – 2010. – Вып. 40. – С. 63–76.
10. Горр Г.В., Мазнев А.В., Щетинина Е.К. Прецессионные движения в динамике твердого тела и в динамике систем связанных твердых тел. – Донецк: ДонНУ, 2009. – 222 с.