СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ МНОГОКОМПОНЕНТНЫХ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ СИСТЕМ

Дейнека В.С., Сергиенко И.В.

Институт кибернетики имени В.М. Глушкова НАН Украины, г. Киев

Современные результаты в областях вычислительной математики, теории оптимального управления распределенными системами, программирования, наличие суперкомпьютеров позволяют создавать мощные информационные технологии анализа состояния и поведения сложных объектов энергетики, машиностроения, а также сложных массивов грунтовых сред при различных воздействиях на них.

По своему строению сложные объекты различного назначения имеют многокомпонентную структуру, составляющие которых отличаются между собой механическими, физическими и другими характеристиками. Часто исследуемые многокомпонентные тела содержат технологические или природные прослои, характеристики которых существенно отличаются от соответствующих характеристик других составляющих тела. Несмотря на малую толщину таких прослоек, они часто существенно влияют на деформирование всего тела, на формирование в нем температурного поля, движение жидкости и другие процессы.

Известно, что на сегодняшний день мощным инструментом для анализа различных процессов в сплошных средах является метод конечных элементов (МКЭ). Непосредственное использование его для анализа процессов в упомянутых многокомпонентных средах приводит к использованию в вычислительных алгоритмах сильно вытянутых конечных элементов на прослоях, а следовательно, это приводит к дополнительному ухудшению чисел обусловленности матриц МКЭ, отчего существенно зависит точность проводимых расчетов.

Накопленный в Украине и за ее пределами многолетний опыт свидетельствует о том, что влияние упомянутых прослоек / трещин на формирование, например, напряженно-деформированного состояния как по всему многокомпонентному телу, так и вблизи самих прослоек, можно учесть с помощью так называемых условий сопряжения – дифференциальных уравнений, записанных относительно срединных поверхностей упомянутых включений и достаточно полно отражающих влияние этих включений на исследуемый процесс. Особенностью таких математических моделей является то, что в значительной части это новые классы краевых, начально–краевых задач в частных производных с разрывными решениями на указанных поверхностях, например, разрывные касательные смещения – различные на берегах продолговатых трещин или по разные стороны слабопрочного включения и др. При определении собственных частот и форм таких тел касательные составляющие собственных форм на упомянутых поверхностях также претерпевают разрыв.

Авторами получены новые классы краевых и начально–краевых задач с условиями сопряжения и разрывными решениями (в том числе, и спектральные задачи с разрывными собственными формами). Разработана методика получения соответствующих классических обобщенных задач в слабых постановках, а для эллиптических задач 2-го, 4-го (стержневые составные системы, составные тонкие пластины) порядков получены соответствующие функционалы энергии, определенные на классах разрывных функций. Доказано существование и единственность обобщенных решений, а для условно–корректных задач – единственность на подпространствах. Для всех этих задач путем использования классов разрывных функций МКЭ построены схемы повышенного порядка точности дискретизации и показано, что по точности за порядками шагов дискретизации они не хуже аналогичных, известных для соответствующих классов задач с гладкими решениями [4–7, 9–11, 13–15, 19–26, 28, 32, 33 и др.].

На основании полученных теоретических результатов под руководством авторов созданы информационные технологии [13 и др.] : НАДРА – решения задач деформирования многокомпонентных тел в двумерных постановках и формирования температурных полей в них; DIFUS – формирования температурных полей в составных телах вращения – цилиндрическая и полярная системы координат; НАДРА–3D – анализа с помощью суперкомпьютеров серии СКИТ Института кибернетики имени В. М. Глушкова НАН Украины условно–стационарного и динамического деформирования пространственных многокомпонентных тел, содержащих произвольно расположенные в них тонкие прослои, включения, продолговатые трещины и формирования температурных полей, движения жидкости в таких телах.

В связи с тем, что для успешного анализа упомянутых процессов часто не достает достоверных данных о механических и физических свойствах многокомпонентных сред и параметрах внешних воздействий, на сегодняшний день целесообразным является создание таких информационных технологий, которые по данным определенных мониторингов позволяли бы уточнять недостающие данные математических моделей и успешно завершать необходимые расчеты.
Авторами, на основании разработанной теории оптимального управления состояниями различных многокомпонентных систем [8, 12, 13, 36 и др.], разработаны алгоритмы построения явных выражений градиентов функционалов–невязок для реализации градиентных методов О.А. Алифанова идентификации параметров различных многокомпонентных тел с включениями [29–31 и др.].

Получены следующие результаты: новые математические модели процессов многокомпонентных тел (классы задач с разрывными решениями); вычислительные алгоритмы повышенного порядка точности дискретизации; эффективные процедуры градиентных методов решения обратных задач, основанные на результатах разработанной авторами теории оптимального управления процессами в многокомпонентных телах; методы системного анализа состояний многокомпонентных тел, реализованные в суперкомпьютерных информационных технологиях, содержащих элементы самонастраивания на исследуемый объект. Ниже приведены некоторые наиболее важные результаты из числа полученных авторами.

1. Численное решение стационарных задач теории упругости с разрывными решениями. Предположим, что в ограниченных связных строго липшицевых областях $\Omega_1,\ \Omega_2 \in R^3$ определена система уравнений упругого равновесия [35]

$$-\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial\sigma_{ik}}{\partial x_k}=f_i(x),\ \ i=1,3\,, \tag{1}$$

где $x=(x_1,x_2,x_3),\ \sigma_{ki}=\sigma_{ik}=\sigma_{ik}(y)=\sigma_{ik}(x;y)=\sum\limits_{l,m=1}^{3}c_{iklm}\varepsilon_{lm};\ \sigma_{ik},\ \varepsilon_{lm}$ – соответственно, элементы тензоров напряжений и деформаций, c_{iklm} – упругие постоянные; $i,\,k=\overline{1,3}\,,\ \ \varepsilon_{lm}=\varepsilon_{lm}(y)=$ $=\varepsilon_{lm}(x;y)=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial y_l}{\partial x_m}+\dfrac{\partial y_m}{\partial x_l}\right),\ \ y=(y_1(x),y_2(x),y_3(x))^{\mathrm{T}}$ – вектор смещений, $y_i(x)$ – его проекция на i-ю ось декартовой системы координат, $f=(f_1(x),f_2(x),f_3(x))$ – вектор массовых сил.

Предположим, что коэффициенты упругости подчинены условиям симметрии $c_{iklm}=c_{lmik}=\ =c_{kiml}(x)$ и удовлетворяют условию [17]

$$\sum_{i,k,l,m=1}^{3}c_{iklm}\,\varepsilon_{ik}\,\varepsilon_{lm}\ge\alpha_0\sum_{i,k=1}^{3}\varepsilon_{ik}^2,\ \ \alpha_0=\mathrm{const}>0\,. \tag{1'}$$

На границе $\Gamma=(\partial\Omega_1\cup\partial\Omega_2)\backslash\gamma$ $(\ \gamma=\ \partial\Omega_1\cap\partial\Omega_2\neq\varnothing,\ \ \Omega_1\cap\Omega_2=\varnothing)$ области $\overline{\Omega}$ заданы смешанные краевые условия

$$\tilde{l}(y)=\varphi\,, \tag{2}$$

выражающие задание: смещений на Γ_1, напряжений σ_n,τ_s на Γ_2, нормальных составляющих y_n вектора смещений и касательных составляющих τ_s вектора напряжений σ на Γ_3, касательных составляющих y_s вектора смещений y и нормальных составляющих σ_n

вектора напряжений σ на Γ_4, где $\Gamma = \bigcup_{i=1}^{4} \Gamma_i$, $\Gamma_i \cap \Gamma_j = \varnothing$ при $i \neq j$; $i, j = \overline{1,4}$.

Предположим, что на участке γ, разделяющем область $\overline{\Omega}$ на две области $\overline{\Omega}_1, \overline{\Omega}_2$, возможны следующие случаи задания условий сопряжения:

– слабопрочного включения [4, 7 и др.]

$$[y_n] = 0,\ [\sigma_n] = 0,\ [\tau_s] = 0,\ \tau_s^{\pm} = r[y_s], \tag{3}$$

отражающие непрерывность нормальных составляющих векторов смещений и напряжений, непрерывность касательной составляющей вектора напряжений и пропорциональность последних скачку касательной составляющей вектора смещений, где $[\varphi] = \varphi^+ - \varphi^-$, $\varphi^+ = \{\varphi\}^+ = \varphi(x)$ при $x \in \gamma \cap \partial\Omega_2$, $\varphi^- = \{\varphi\}^- = \varphi(x)$ при $x \in \gamma \cap \partial\Omega_1$, r – коэффициент жесткости на сдвиг слабопрочного прослоя γ;

– наличие расклинивающего давления p_0 на трещине γ [11, 19]

$$[y_n] = 0,\ [\sigma_n] = -p_0,\ [\tau_s] = 0,\ \tau_s^{\pm} = r[y_s]; \tag{4}$$

– вязкого трения [1, 11]

$$[y_n] = 0,\ [\sigma_n] = 0,\ \tau_s^{+} = R[y_s] + g_1,\ \tau_s^{-} = R[y_s] + g_2, \tag{5}$$

$$[y_s] = 0,\ [\tau_s] = 0,\ \sigma_n^{+} = R[y_n] + g_1,\ \sigma_n^{-} = R[y_n] + g_2. \tag{6}$$

Теорема 1. *Каждая из задач (1)–(3) (задача 1); (1), (2), (4) (задача 2); (1), (2), (5) (задача 3); (1), (2), (6) (задача 4) имеет единственное обобщенное решение* $y^i \in V_i$, *доставляющее на* V_i *минимум функционалу энергии*

$$\hat{\text{О}}_i(v) = a_i(v,v) - 2\, l_i(v), \quad i = \overline{1,4} \tag{7}$$

и являющееся единственной функцией y^i *из* V_i, *которая* $\forall v \in V_i^0$ *удовлетворяет тождеству*

$$a_i(y^i, v) = l_i(v), \quad i = \overline{1,4}, \tag{8}$$

где

$$a_i(y,v) = a_0(y,v) + a_0^i(y,v),\ \ l_i(v) = (f,v) + l_i^0(v),$$

$$a_0(y,v) = \int_{\Omega} \sum_{i,k,l,m=1}^{3} c_{iklm}\, \varepsilon_{ik}(y)\, \varepsilon_{lm}(v) dx,\ a_0^i(y,v) = \int_{\gamma} r[y_s][v_s] d\gamma,\ \ i = \overline{1,3},$$

$$a_0^4(y,v) = \int_{\gamma} R[y_n][v_n] d\gamma.$$

Линейные функционалы $l_i^0(v)$ выражают работу поверхностных сил на возможных смещениях и определяются согласно [11].

Множество V_i составляют функции из $\overline{V} = \{v : v\big|_{\Omega_i} \in W_2^1(\Omega_i),\ i = 1, 2\}$, удовлетворяющие соответствующим заданным главным условиям, а V_i^0 – подпространство $\overline{V}$, функции которого удовлетворяют однородным главным условиям $i-$й задачи.

Каждую из задач вида (7), (8) можно решить приближенно с помощью метода конечных элементов. Для этого разобъем области $\overline{\Omega}_i$ на N_i конечных элементов $\overline{e}_i^j$ $(j = \overline{1, N_i}\ ,\ i = 1, 2)$ регулярного семейства [34]. Используя классы H_k^N вектор–функций $U_k^N(x)$, компоненты которых $u_i\big|_{\overline{\Omega}_j} \in C^3(\overline{\Omega}_j) \cap C^{k+1}(\Omega_j)$ являются полными полиномами степени k переменных x_1, x_2, x_3 на каждом $\overline{e}_i^j$, и удовлетворяют главным условиям или интерполируют их, на основании (7), (8) получаем систему линейных алгебраических уравнений

$$A\overline{U} = B . \tag{9}$$

Решение $\overline{U}$ системы (9) существует и единственно. Вектор $\overline{U}$ определяет единственное приближенное решение $U_k^N \in H_k^N$ $(N = N_1 + N_2)$ каждой из задач вида (7), (8).

Следуя [4, 7, 11], с учетом оценок интерполяции [34], в предположении, что каждая компонента y_l, $l = \overline{1, 3}$, решения y на Ω_j принадлежит пространству Соболева $W_2^{k+1}(\Omega_j),\ j = 1, 2$, получим оценку

$$\left\| y - U_k^N \right\|_a \le c\, h^k ; \tag{10}$$

если $H_k^N \subset H$, то также имеем оценку

$$\left\| y - U_k^N \right\|_H \le c\, h^k , \tag{11}$$

где $\|\cdot\|_a$ – энергетическая норма, $\|\cdot\|_H = \left(\sum_{i=1}^{2} \|\cdot\|^2_{W_2^1(\Omega_i)} \right)^{1/2}$, h – максимальный диаметр всех конечных элементов $\overline{e}_i^j$, $c = \text{const}$.

Аналогичные результаты получены для осесимметричных задач теории упругости с изотропными и ортотропными материалами составных тел вращения [4, 11, 19]. Предложенные математические модели и разработанные вычислительные алгоритмы использованы при решении практических задач расчета корпусов глубоководных аппаратов [33], объектов гидротехники Сибири [14] и др.

2. Численное решение нестационарных задач теории упругости с разрывными решениями. В работах [6, 7, 33] при исследовании продольных нестационарных деформаций составного стержня, содержащего короткую слабопрочную составляющую, впервые получена начально–краевая задача для гиперболического уравнения с условиями сопряжения неидеального контакта. Для этой задачи построена соответствующая обобщенная (в слабой постановке) задача, определенная на классах функций, допускающих разрывы первого рода по пространственным переменным. С использованием классов разрывных функций метода конечных элементов получены приближенные решения $U_k^N(x,t)$, для которых имеет место оценка

$$\left\| y - U_k^N \right\|_{L_2 \times L_\infty} \le c\, h^k , \qquad (12)$$

где $y = y(x,t)$ – допускающее разрыв по пространственной переменной классическое решение исходной задачи, $c = \text{const}$, h – максимальная из длин всех конечных элементов, k – степень полных полиномов МКЭ, $\left\|\psi\right\|_{L_2 \times L_\infty} = \sup\limits_{t \in [0,T]} \left\|\psi\right\|_{L_2(\Omega)}(t)$.

В работах [7, 14, 15, 32] полученные результаты обобщены на задачу об исследовавнии нестационарного напряженно-деформированного состояния (НДС) двухкомпонентного тела, содержащего слабопрочную прослойку.

Промежуточные задачи Коши для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка решаются с помощью разностной схемы Кранка–Николсона. При достаточной гладкости классического решения y в каждой из областей $\bar{\Omega}_{jT}$, $j = 1,2$, для приближенного решения $U^j(x)$, $j = \overline{0,m}$ (m – количество разбиений временного отрезка [0,T] с равномерным шагом $\tau = T/m$), полученного с использованием классов H_k^N разрывных функций МКЭ и разностной схемы Кранка–Николсона, имеет место оценка

$$\max_{j=\overline{0,m}} \left\| y(x,t_j) - U^j(\cdot) \right\|_{L_2(\Omega)} \le c(h^k + \tau^2) . \qquad (13)$$

Предположим, что тело, занимающее объем $\bar{\Omega}$, состоит из двух тел соответственно с объемами $\bar{\Omega}_1, \bar{\Omega}_2$, где $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \varnothing,\ \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2 = \gamma \ne \varnothing$. На участке γ^- границы $\partial\Omega_1$ (соприкосновения области $\bar{\Omega}_1$ с областью $\bar{\Omega}_2$) распределена равномерно масса с плотностью m_1, а на участке γ^+ границы $\partial\Omega_2$ (соприкосновения области $\bar{\Omega}_2$ с областью $\bar{\Omega}_1$) масса распределена равномерно с плотностью m_2. Будем считать, хотя это не принципиально, что на границе

$\Gamma = \left(\partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2\right) \setminus \gamma \quad \forall t \in (0,T]$ отсутствуют смещения.

Для деформируемого под воздействием массовых сил тела в предположении, что на γ возможно лишь проскальзывание с трением области $\bar{\Omega}_1$ относительно $\bar{\Omega}_2$ без отслаивания берегов трещины γ, в силу принципа Даламбера [2] вариационное уравнение Лагранжа принимает вид [13, 26]

$$\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} \sigma_{ij}\delta\varepsilon_{ij}dx + \int_\gamma r\left[u_s\right]\delta\left[u_s\right]d\gamma + \int_\Omega \rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\delta u\,dx + \int_\gamma m\frac{\partial^2 u_n}{\partial t^2}\delta u_n\,d\gamma + \\ + \int_\gamma m_1\frac{\partial^2 u_s^-}{\partial t^2}\delta u_s^-\,d\gamma + \int_\gamma m_2\frac{\partial^2 u_s^+}{\partial t^2}\delta u_s^+\,d\gamma = \int_\Omega f\,\delta u\,dx, \tag{14}$$

где $m = m_1 + m_2$; σ_{ij}, ε_{ij} – компоненты тензоров напряжений и деформаций; u_n, u_s – нормальная и касательная составляющие вектора смещений u; $f = \left\{f_i(x,t)\right\}_{i=1}^{3}$ – вектор массовых сил; δu – геометрически возможная вариация истинных векторов смещения u=u(x); $[\varphi\ ] = \varphi^+ = \varphi(x,t)$ при $(x,t) \in \gamma_T^+$; $\varphi^- = \{\varphi\}^- = \varphi\{x,t\}$ при $(x,t) \in \gamma_T^-$; $\gamma_T^\pm = \gamma^\pm \times (0,T]$; $\gamma^+ = \partial\Omega_2 \cap \gamma$; $\gamma^- = \partial\Omega_1 \cap \gamma$; $r = \mathrm{const}$ – параметр, характеризующий шероховатость трещины γ, или параметр, характеризующий тонкое слабопрочное включение γ (коэффициент жесткости на сдвиг малопрочного включения). Предполагаем, что для каждой из областей Ω_1, Ω_2 справедлив закон Гука и имеет место неравенство (1′).

Предположим, что вектор смещения $u = u(x,t)$, где $x = (x_1, x_2, x_3)$, $u = \left(u_1, u_2, u_3\right)^T$, u_i – проекция вектора смещения на i-ю ось декартовой системы координат) – достаточно гладкая функция в каждой из областей Ω_1, Ω_2 $\forall t \in \left(0,T\right]$. Тогда из (14) следует [13, 26]

$$\begin{gathered}
\rho\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \sum_{k=1}^{3}\frac{\partial\sigma_{ik}}{\partial x_k} + f_i, \ (x,t) \in \Omega_T \ ; \\
\left[u_n\right] = 0, \ (x,t) \in \gamma_T \ ; \\
\left[\sigma_n\right] = m\frac{\partial^2 u_n}{\partial t^2}, \ (x,t) \in \gamma_T \ ; \\
\tau_s^- = r\left[u_s\right] - m_1\frac{\partial^2 u_s^-}{\partial t^2}, \ (x,t) \in \gamma_T \ ; \\
\tau_s^+ = r\left[u_s\right] + m_2\frac{\partial^2 u_s^+}{\partial t^2}, \ (x,t) \in \gamma_T \ ,
\end{gathered} \tag{15}$$

где ρ – плотность, $\gamma_T = \gamma \times (0,T]$, $\Omega_\text{T} = \Omega \times (0,T]$, $\Omega = \Omega_1 \bigcup \Omega_2$.

Краевые условия имеют вид

$$u\big|_{\Gamma_T} = 0, \quad (x,t) \in \Gamma_T, \tag{16}$$

где $\Gamma_T = \Gamma \times (0,T]$.

Начальные условия примем в виде

$$\begin{aligned} & u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \bar{\Omega}_1 \bigcup \bar{\Omega}_2, \\ & \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \psi_0(x), \quad x \in \bar{\Omega}_1 \bigcup \bar{\Omega}_2. \end{aligned} \tag{17}$$

Теорема 2. *Пусть компоненты классического решения u(x,t) начально–краевой задачи (15)–(17) достаточно гладкие на областях* $\bar{\Omega}_{iT} = \bar{\Omega}_i \times (0,T]$, $i = 1, 2$. *Тогда для приближенного решения* $U(x,t) \in H_k^N$ *имеет место оценка*

$$\| u - U \|_{L_2 \times L_\infty} \le c\, h^k \ , \tag{18}$$

где $\| \psi \|_{L_2 \times L_\infty} = \sup\limits_{t \in (0,T)} \| \psi \|_{L_2}(t)$, $c = \text{const}$, *h – наибольший из диаметров всех конечных элементов; k – степень полиномов конечных элементов регулярного семейства на каждой из областей* $\bar{\Omega}_1$, $\bar{\Omega}_2$.

Теорема 3. *Пусть u(x,t) – классическое решение задачи (15)–(17), каждая из компонент которого имеет ограниченные (k+1)-е частные производные по пространственным переменным в* Ω_1, Ω_2, *а* $\left\{ U^j(x) \right\}_{j=0}^m$ *– решение, получаемое с помощью схемы Кранка–Николсона. Тогда имеет место оценка*

$$\max_{\underline{j=0,m}} \left\langle \left\langle u_j - U^j \right\rangle \right\rangle \le c \left(h^k + \tau^2 \right).$$

3. Численное решение задач на собственные значения для операторов теории упругости. В работах [6, 7, 33] при исследовании свободных продольных колебаний составного стержня, содержащего короткую слабопрочную составляющую, впервые получена краевая задача на собственные значения для эллиптического оператора второго порядка с переменными коэффициентами и с условиями сопряжения неидеального контакта (с собственными функциями, допускающими разрыв первого рода в срединной точке x=ξ короткой малопрочной составляющей). Получена соответствующая классическая обобщенная спектральная задача, определенная на классах функций, допускающих разрыв первого рода в точке x = ξ. Установлена разрешимость задачи в классах

$$R_+ \times H \ \ (R_+ = (0, +\infty),\ H = \{v(x): v\Big|_{\Omega_i} \in W_2^1(\Omega_i),\ i = 1,2;$$

$$v\Big|_\Gamma = 0,\ \Gamma = (\partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2) \setminus \gamma\}$$

и существование счетного положительного спектра задачи. Путем использования классов функций МКЭ, допускающих разрыв первого рода на γ, построены схемы повышенного порядка точности дискретизации задачи; для приближенных собственных функций (для простого спектра) $u_k^N \in H_k^N$ и собственных значений λ_k^N получены оценки

$$0 \le \lambda_k^N - \lambda_k \le c_1 h^{2k},\ \ \left\| u_k - u_k^N \right\|_{W_2^1} \le c_2 h^k\,. \tag{19}$$

Путем численного эксперимента для модельной одномерной задачи показано, что некоторые собственные значения λ_k не зависят от значения жесткости r короткого слабопрочного включения, другие – уменьшаются при $r \to +0$, а при $r \to \infty$ стремятся к соответствующим собственным значениям системы с идеальным контактом.

В работах [7, 14, 32] результаты работы [6] обобщены на задачу о собственных значениях и собственных формах тела, содержащего тонкую слабопрочную прослойку. Для соответствующих приближенных собственных значений и форм получены оценки вида (19). В работе [15] полученные результаты распространены на спектральную задачу об определении собственных частот и разрывных собственных форм свободных колебаний элемента толстой длинной ортотропной цилиндрической оболочки вращения, регулярно подкрепленной толстыми кольцевыми ортотропными ребрами жесткости. Для решения этой спектральной задачи построены вычислительные алгоритмы повышенного порядка точности. Для приближенных решений получены оценки вида (19).

4. Численное решение условно–корректной задачи термоупругости. Предположим, что в ограниченных связных строго липшицевых областях $\Omega_1,\ \Omega_2 \in R^3$ определена система уравнений термоупругого равновесия [2, 16]

$$-\sum_{k=1}^{3} \frac{\partial \sigma_{ik}(\theta; y)}{\partial x_k} = f_i,\ \ i = \overline{1,3}\,, \tag{20}$$

где $x = (x_1, x_2, x_3),\ \sigma_{ki} = \sigma_{ik}(x, \theta; y) = \sum_{l,m=1}^{3} c_{iklm}(\varepsilon_{lm} - \varepsilon^0_{lm}),\ \sigma_{ik}$ – компоненты тензора напряжений; $\varepsilon_{lm} = \varepsilon_{lm}(y)$ – компоненты тензора деформаций; $y = (y_1(x), y_2(x), y_3(x))^{\mathrm{T}}$, $y_i(x)$ – проекция вектора смещений y на i-ю ось декартовой системы координат; ε^0_{lm} – компоненты тензора деформаций, вызванных изменением $\theta = T - T_0$ температуры T от начального состояния T_0. Если материал упруго– и теплоизотропный, то полагают [2, 16] $\varepsilon^0_{lm} = l^0\delta_{lm} = \alpha\theta\delta_{lm}$, α – коэффициент теплового расширения, δ_{lm} – символ Кронекера, c_{iklm} – упругие постоянные материала области Ω_1 и Ω_2 соответственно, удовлетворяющие условию (1′).

На области $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ изменение температуры θ удовлетворяет уравнению

$$-\sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(k_{ij}\frac{\partial\theta}{\partial x_j}\right) = \bar{f}\,, \qquad (21)$$

где $k_{ij} = k_{ji}(x)$, $\sum\limits_{i,j=1}^{3} k_{ij}\xi_i\xi_j \ge \bar{\alpha}_0 \sum\limits_{i=1}^{3}\xi_i^2$, $\forall \xi_i \in R^1$, $\bar{\alpha}_0 = \text{const} > 0$.

На границе $\Gamma = (\partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2)\backslash\gamma$ ($\gamma = \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2 \ne \varnothing$, $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \varnothing$) заданы краевые условия

$$y = \varphi_1\,, \qquad (22)$$

$$\sum_{i,j=1}^{3} k_{ij}\frac{\partial\theta}{\partial x_j}\cos(n, x_i) = g, \quad x \in \Gamma\,. \qquad (23)$$

На разрезе γ области $\bar{\Omega}$ условия сопряжения имеют вид

$$[y_n] = 0\,, \qquad (24)$$

$$[\sigma_n] = 0,\ [\tau_s] = 0,\ \{\tau_s\}^{\pm} = r[y_s]\,, \qquad (25)$$

$$\left[\sum_{i,j=1}^{3} k_{ij}\frac{\partial\theta}{\partial x_j}\cos(n, x_i)\right] = 0\,, \qquad (26)$$

$$\left\{\sum_{i,j=1}^{3} k_{ij}\frac{\partial\theta}{\partial x_j}\cos(n, x_i)\right\}^{\pm} = r_1[\theta]\,, \qquad (27)$$

где r_1, $r = \text{const} \ge 0$, $[\varphi] = \varphi^+ - \varphi^-$, $\varphi^+ = \{\varphi\}^+ = \varphi(x)$ при $x \in \partial\Omega_2 \cap \gamma$, $\varphi^- = \{\varphi\}^- = \varphi(x)$ при $x \in \partial\Omega_1 \cap \gamma$; $y_n(\sigma_n)$ – нормальная составляющая вектора смещений (напряжений), $y_s(\sigma_s)$ – касательная составляющая вектора смещений (напряжений).

Легко видеть, если $Y = (y, \theta)^{\mathrm{T}}$ – классическое решение краевой задачи (20)–(27), то $Y + (0, \tilde{n})^{\mathrm{T}}$ – также классическое решение этой краевой задачи, где с – произвольная вещественная постоянная.

Необходимым условием существования классического решения краевой задачи (20)–(27), является равенство

$$\int_\Omega \overline{f}\, dx + \int_\Gamma g\, d\Gamma = 0 . \qquad (28)$$

Будем искать решение $Y = (y,\, \theta)^{\mathrm{T}}$ задачи (20)–(27) при условии

$$\int_\Omega \theta\, dx = Q , \qquad (29)$$

где Q – произвольное фиксированное вещественное число.

Определение 1. Обобщенным решением краевой задачи (20)–(27), (29) (задачи 1) называется вектор–функция $Y = (y, \theta)^{\mathrm{T}} \in H_Q$, которая $\forall z = (z_1, z_2)^{\mathrm{T}} \in H_0$ удовлетворяет тождествам

$$a(y, z_1) = l(\theta;\; z_1), \qquad (30)$$

$$a_0(\theta, z_2) = l_0(z_2), \qquad (31)$$

где $H_Q = V \times \Theta_Q$, $\Theta_Q = \{v \in \overline{\Theta} : (v, 1) = Q\}$, $H_0 = V_0 \times \Theta_0$, $\Theta_0 = \{v \in \overline{\Theta} : (v, 1) = 0\}$, $l_0(z_2) = (\overline{f}, z_2) + (g\,,\, z_2)_{L_2(\Gamma)}$.

Следуя [9], легко установить справедливость утверждения:

Теорема 4. *Краевая задача 1 имеет единственное обобщенное решение* $Y = (y, \theta)^{\mathrm{T}} \in H_Q$, *где y – единственная вектор–функция, доставляющая на V минимум функционалу*

$$\hat{O}(v) = a(v, v) - 2\, l(\theta; v) \qquad (32)$$

и являющаяся единственным в V решением задачи (30), θ – единственная функция, доставляющая на Θ_Q *минимум функционалу*

$$\Phi_0(w) = a_0(w, w) - 2\, l_0(w) \qquad (33)$$

и являющаяся единственным в Θ_Q *решением задачи (31).*

Пусть вместо (21) в области Ω определено уравнение [3, 8, 9, 13]

$$-\sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(k_{ij} \frac{\partial \theta}{\partial x_j} \right) + \int_\Omega \theta\, dx = \overline{f} + Q , \qquad (34)$$

на границе Γ задано краевое условие Неймана (23), а на разрезе γ – условия сопряжения (26), (27). Тем самым определена краевая задача (20), (22)–(27), (34) (задача 1′).

Замечание 1. Если $Y = (y, \theta)^{\mathrm{T}}$ – классическое решение задачи 1, то Y – классическое решение задачи 1′.

Определение 2. Обобщенным решением краевой задачи 1′ называется функция $Y = (y, \theta)^{\mathrm{T}} \in H$, которая $\forall z = (z_1, z_2)^{\mathrm{T}} \in H_0$ удовлетворяет системе тождеств

$$a(y, z_1) = l(\theta; z_1) , \qquad (35)$$

$$a_0(\theta,\, z_2) + (\theta,\, 1)(z_2,\, 1) = l_0(z_2) + Q(z_2,\, 1)\,, \tag{36}$$

где $H = V \times \overline{\Theta},\ H_0 = V_0 \times \overline{\Theta}$.

Следуя [9, 27], легко установить справедливость утверждения:

Теорема 5. *Краевая задача 1′ имеет единственное обобщенное решение* $Y = (y, \theta)^{\mathrm{T}} \in H$, *где y − единственная вектор–функция, доставляющая на V минимум функционалу (32) и являющаяся единственным в V решением задачи (30), функция θ предварительно определена как единственная функция, доставляющая на* $\overline{\Theta}$ *минимум функционалу*

$$\Phi_0'(w) = a_0(w,\, w) + (w,\, 1)^2 - 2\, l_0(w) - 2\, Q\, (w,\, 1) \tag{37}$$

и являющаяся единственным в $\overline{\Theta}$ *решением задачи (36).*

Замечание 2. Если выполнено ограничение (28), то задачи 1, 1′ имеют общее единственное решение $Y = (y, \theta)^{\mathrm{T}}$ и если $Y\big|_{\Omega_i} \in \tilde{N}^2(\Omega_i),\ i = 1, 2,$ то Y − единственное классическое решение эквивалентных краевых задач 1, 1′.

Приближенное обобщенное решение краевой задачи 1 будем искать как приближенное решение задачи (35), (36).

Теорема 6. *Пусть классическое решение краевой задачи (20)–(27), (29)* $Y\big|_{\Omega_i} \in W_2^{k+1}(\Omega_i),\ i = 1, 2$. *Тогда для приближенного решения* $Y_k^N \in H_k^N$ *задачи (35), (36) имеет место оценка*

$$\left\| Y - Y_k^N \right\|_{W_2^1} \le c\, h^k\,. \tag{38}$$

Доказательство. С учетом обобщенного неравенства Пуанкаре [11, 21] имеем

$$\alpha_0' \left\| \theta - \theta_k^N \right\|_{W_2^1}^2 \le a_0'(\theta - \theta_k^N\,,\, \theta - \theta_k^N) = \Phi_0'(\theta_k^N) - \Phi_0'(\theta) \le$$
$$\le \Phi_0'(\overline{\theta}_k^N) - \Phi_0'(\theta) = a_0'(\overline{\theta}_k^N - \theta,\, \overline{\theta}_k^N - \theta) \le c_0'\, h^{2k}\,,$$

т.е.

$$\left\| \theta - \theta_k^N \right\|_{W_2^1} \le c_1'\, h^k\,, \quad c_1' = \mathrm{const} > 0\,, \tag{39}$$

где $\overline{\theta}_k^N$ – функция из $\overline{\Theta}_k^N$, являющаяся интерполяционным полиномом решения θ на каждом из $\overline{e}_i^{\,j}$,

$$a_0'(u,\, v) = a_0(u,\, v) + (u,\, 1)(v,\, 1),$$
$$\Phi_0'(v) = a_0'(v,\, v) - 2\, l_0'(v), \quad l_0'(v) = l_0(v) + Q\, (v,\, 1).$$

С учетом (39), следуя [9], получаем оценку $\left\| y - y_k^N \right\|_{W_2^1} \le c_n\, h^k$. Теорема доказана.

В работе [9] также рассмотрены аналогичные вопросы для условно–корректной задачи о напряженно-деформированном состоянии тела с массовыми силами, зависящими от градиента температуры.

5. Численное решение задач о прогибах стержневых систем. В работах [8, 13, 23] рассмотрены вопросы построения вычислительных алгоритмов повышенного порядка точности численного определения прогибов составных стержней с одной, двумя степенями свободы (условно–корректных систем) и при единственном решении рассматриваемых краевых задач для обыкновенного дифференциального уравнения четвертого порядка с условиями сопряжения неидеального контакта.

Пусть в области $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ $(\Omega_1 = (0, \xi),\ \Omega_2 = (\xi, l),\ 0 < \xi < l < \infty)$ определено уравнение

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(k(x) \frac{d^2 y}{dx^2} \right) = f(x), \tag{40}$$

где $k = k(x)$ – переменная жесткость на изгиб стержня, f(x) – интенсивность нормальной нагрузки; $k\Big|_{\bar{\Omega}_i} \in C^1(\bar{\Omega}_i) \cap C^2(\Omega_i),\ f\Big|_{\Omega_i} \in C(\Omega_i),\ i = 1, 2;\ 0 < k_0 \le k \le k_1 < \infty,$ $\left| f \right| < \infty;\ k_0,\ k_1 \in R^1,\ R^1$ – множество вещественных чисел.

На концах отрезка $[0, l]$ заданы условия

$$\begin{aligned} -\frac{d}{dx}\left(k \frac{d^2 y}{dx^2} \right) = g_0,\ \ k\frac{d^2 y}{dx^2} = g_0', \ \ x = 0, \\ \frac{d}{dx}\left(k \frac{d^2 y}{dx^2} \right) = g_1,\ \ -k\frac{d^2 y}{dx^2} = g_1', \ \ x = l, \end{aligned} \tag{41}$$

где $g_i,\ g_i' \in R^1,\ i = 0,1$.

В точке $x = \xi$ условия сопряжения неидеального контакта имеют вид

$$[y] = 0, \tag{42}$$

$$[k\, y''] = 0,\ \ \{k\, y''\}^{\pm} = \alpha [y'],\ \ \left[\frac{d}{dx}\left(k \frac{d^2 y}{dx^2} \right) \right] = Q, \tag{43}$$

где

$$\alpha, Q \in R^1,\ \alpha > 0;\ [\varphi] = \varphi^+ - \varphi^-,\ \ \varphi^{\pm} = \{\varphi\}^{\pm} = \varphi(\xi \pm 0),\ \varphi' = \frac{d\varphi}{dx},\ \varphi'' = \frac{d^2\varphi}{dx^2}$$

Условия (42), (43) отражают непрерывность прогибов, непрерывность моментов и наличие скачка Q перерезывающей силы в точке $x = \xi$ шарнирного соединения тонких стержней.

Предположим, что $y(x) \in \bar{M} = \{v(x) : v\big|_{\bar{\Omega}_i} \in C^3(\bar{\Omega}_i) \cap C^4(\Omega_i),\ i = 1,2\}$ – классическое решение краевой задачи (40)–(43). Легко видеть, что для произвольных вещественных чисел a, b функция $z = y + a + bx$ – также классическое решение этой задачи. Для его существования необходимо, чтобы выполнялись условия

$$\int_0^l f\,dx = g_1 + g_0 - Q, \quad \int_0^l \rho f\,dx = l\left(g_1 - g_0\right)/2 - Q\left(\xi - \frac{l}{2}\right) + g_1' + g_0', \qquad (44)$$

где $\rho = x - l/2$.

Будем искать классическое решение $y(x) \in \bar{M}$ краевой задачи (40)–(43), удовлетворяющее ограничениям

$$\int_0^l y dx = 0, \ \int_0^l \rho y dx = 0. \qquad (45)$$

Введем обозначения: $\bar{H}_2^k = \{v:\ v\big|_{\Omega_i} \in W_2^k(\Omega_i),\ i = 1,2\}$,

$\bar{V}_2^2 = \{v \in \bar{H}_2^2 :\ \int_0^l v dx = 0,\ \int_0^l \rho v dx = 0\}$, $V_{2.0}^2 = \{v \in \bar{V}_2^2 :\ [v] = [v]\big|_{x=\xi} = 0\}$,

$H = \{v \in \bar{H}_2^2 :\ [v]\big|_{x=\xi} = 0\}$, $W_2^k(\Omega_i)$ – пространство Соболева функций с нормой $\|v\|_{k,\Omega_i} = \left\{\sum_{|\alpha| \le k} \left\|D^\alpha v\right\|_{0,\Omega_i}^2\right\}^{1/2} = \left\{\int_{\Omega_i} \sum_{|\alpha| \le k} (D^\alpha v)^2 dx\right\}^{1/2}$,

$\|v\|_{0,\Omega_i} = \left(\int_{\Omega_i} v^2 dx\right)^{1/2}$, $D^\alpha = \dfrac{d^\alpha}{dx^\alpha}$, $\alpha, k = 0, 1, 2$.

Рассмотрим задачу: найти функцию $y \in V_{2.0}^2$, удовлетворяющую тождеству

$$a_1(y,v) = l_1(v) \ \ \forall v \in V_{2.0}^2, \qquad (46)$$

где

$$a_1(y,v) = \int_0^l k \frac{d^2 y}{dx^2} \frac{d^2 v}{dx^2} dx + \alpha \left[\frac{dy}{dx}\right]\left[\frac{dv}{dx}\right],$$
$$l_1(v) = \int_0^l fv dx - g_0 v(0) - g_1 v(l) + Q\, v(\xi) - g_0'\, v'(0) - g_1'\, v'(l). \qquad (47)$$

Легко видеть, что классическое решение краевой задачи (40)–(43) также является решением задачи (46).

Определение 3. Решение задачи (46) называется обобщенным (слабым) решением краевой задачи (40)–(43), (45), а сама задача (46) – обобщенной (слабой) задачей, соответствующей краевой задаче (40)–(43), (45).

Теорема 7. *Краевая задача (40)–(43), (45) имеет единственное обобщенное решение* $y(x)\in V_{2.0}^2$. *Если* $y(x)\in \bar{\Gamma}$ *, то при выполнении условий (44) оно является классическим решением этой задачи.*

Легко устанавливается, что классическое решение также является и обобщенным.

Замечание 3. Для существования решения $y(x)\in V_{2.0}^2$ задачи (46) не требуется выполнения ограничений (44).

Задачу (40)–(43), (45) будем называть краевой задачи 1. Введем в рассмотрение вспомогательную краевую задачу. На области $\Omega=\Omega_1\cup\Omega_2$ определено уравнение

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(k\frac{d^2y}{dx^2}\right)+\int_0^l ydx+\rho\int_0^l \rho ydx=f(x)\,. \tag{48}$$

На концах отрезка $[0,\,l]$ заданы краевые условия (41), а в точке $x=\xi$ – условия сопряжения (42), (43).

Задача в слабой постановке для краевой задачи (48), (41)–(43) (задачи 1′) заключается в поиске функции $y(x)\in H$, удовлетворяющей $\forall v(x)\in H$ тождеству

$$a_2(y,v)=l_2(v)\,, \tag{49}$$

где

$$a_2(u,v)=a_1(u,v)+\int_0^l udx\int_0^l vdx+\int_0^l \rho udx\int_0^l \rho vdx\,,\;\; l_2(v)=l_1(v)\,.$$

Вариационная задача состоит в поиске функции y(x), доставляющей на H наименьшее значение функционалу

$$\Phi_2(v)=a_2(v,v)-2l_2(v)\,. \tag{50}$$

Справедливо утверждение.

Теорема 8. *Задачи (49), (50) эквивалентны и имеют единственное решение* $y(x)\in H$. *Если* $y(x)\in\bar{\Gamma}$ *, то оно является классическим решением краевой задачи 1′, а при выполнении ограничений (44) – и задачи 1, где условия (41), (43), (45) выполняются автоматически, т.е. они естественные.*

Теорема 9. *Если классическое решение краевой задачи (40)–(43), (45) на интервалах* $(0,\xi)$, (ξ,l) *имеет непрерывные ограниченные производные до (k+1)-го порядка включительно* $(k\ge 3)$, *то для приближенного* *обобщенного решения $y_k^N \in H_k^N$ краевой задачи 1′ справедлива оценка*

$$\left\| y - y_k^N \right\|_H \le \tilde{n} h^{k-1}, \tag{51}$$

где $c = \text{const}$, $h = \max\limits_{\substack{i=0,N-1 \\ i\neq\chi}} h_i$, $h_i = x_{i+1} - x_i$, $H_k^N = \{v_k^N \in \bar{H}_k^N : [v_k^N] = 0\}$.

Предположим, что в области $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ определено уравнение прогибов (40). На концах отрезка $[0, l]$ заданы краевые условия

$$\begin{gathered} -(k\,y'')' = g_0,\ \ -k\,y'' + c\,y' = g_0',\quad x = 0, \\ (k\,y'')' = g_1,\ \ -k\,y'' = g_1',\quad x = l, \end{gathered} \tag{52}$$

где $c = \text{const} > 0$. В точке $x = \xi$ условия сопряжения имеют вид (42), (43).

Пусть $y(x) \in \bar{M}$ – классическое решение краевой задачи (40), (42), (43), (52) (задачи 2). Легко видеть, что $y + c_0$ – также ее классическое решение для произвольной постоянной c_0.

Выполнение равенства

$$(f, 1) = g_1 + g_0 - Q \tag{53}$$

является необходимым условием существования классического решения y этой краевой задачи.

Будем искать это решение при ограничении

$$(y, 1) = 0. \tag{54}$$

Обозначим $V_{2.0}^2 = \{v(\tilde{o}) \in \acute{I} : (v,\ 1) = 0\}$, где пространство H определено в предыдущем пункте. Пусть y(x) – классическое решение краевой задачи (40), (42), (43), (52), (54). Легко видеть, что $y(x)$ является обобщенным решением из пространства $V_{2.0}^2$, удовлетворяющим тождеству

$$a_1(y, v) = l_1(v) \quad \forall v \in V_{2.0}^2, \tag{55}$$

где

$$a_1(y, v) = \int_0^l k y'' v'' dx + \alpha [y'][v'] + c\,y'(0) v'(0),$$

$$l_1(v) = (f, v) - g_0 v(0) - g_1 v(l) + Q\,v(\xi) + g_0'\,v'(0) - g_1'\,v'(l).$$

Теорема 10. *Краевая задача (40), (42), (43), (52), (54) имеет единственное обобщенное решение $\acute{o} \in V_{2.0}^2$ и оно является единственной функцией, доставляющей на $V_{2.0}^2$ наименьшее значение функционалу*

$$\Phi_1(w) = a_1(w, w) - 2 l_1(w). \tag{56}$$

Справедливость теоремы устанавливается на основе леммы Лакса–Мильграма и того, что тождество (55) является необходимым и достаточным условием существования экстремали $\acute{o} \in V_{2.0}^2$ на $V_{2.0}^2$

функционала (56).

Пусть вместо (40) на области Ω определено уравнение

$$\left(k\acute{o}''\right)'' + (y,1) = f\ . \qquad (57)$$

На концах отрезка $[0,l]$ заданы краевые условия (52), а в точке $x = \xi$ – условия сопряжения (42), (43) (задача 2′).

Задача в слабой постановке для краевой задачи (42), (43), (52), (57) (задачи 2′) заключается в поиске функции $y \in H$, удовлетворяющей тождеству

$$a_2(y,v) = l_2(v) \quad \forall v \in H, \qquad (58)$$

где

$$a_2(y,v) = a_1(y,v) + (y,1)(v,1), \quad l_2(v) = l_1(v)\ .$$

Вариационная задача состоит в поиске функции y(x), доставляющей на H минимум функционалу

$$\Phi_2(v) = a_2(v,v) - 2\,l_2(v)\ . \qquad (59)$$

Справедливо утверждение:

Теорема 11. *Задачи (58), (59) эквивалентны и имеют единственное решение y(x) в H. Если решение* $y \in \bar{\Gamma}$ *, то оно является классическим решением краевой задачи 2′, а при выполнении ограничения (53) – и задачи 2.*

Справедливость теоремы устанавливается на основе леммы Лакса–Мильграма.

Теорема 12. *Пусть* $y \in H$ *и* $w \in V_{2.0}^2$ *– единственные решения задач (59) и (56) соответственно. Если выполнено условие (53), то* $y = w$.

Приближенное обобщенное решение краевой задачи (40), (42), (43), (52), (54) можно найти с помощью МКЭ, решив приближенно одну из эквивалентных задач (58), (59).

Теорема 13. *Если классическое решение у краевой задачи (40), (42), (43), (52), (54) на интервалах* $(0,\xi), (\xi,l)$ *имеет непрерывные ограниченные производные до (k+1)-го порядка включительно* $(k \geq 3)$, *то для приближенного обобщенного решения* $y_k^N \in H_k^N$ *краевой задачи 2′ справедлива оценка вида (51).*

В работе [25] расссмотрены вопросы построения вычислительных алгоритмов повышенного порядка точности для численного определения прогибов составной тонкой пластины при различных условиях соединения ее составляющих.

6. Численное решение спектральных задач исследования устойчивости и собственных колебаний составных стержней [24]. В [14] приведены результаты вычислительных экспериментов, свидетельствующие о существенном влиянии тонких коротких включений на динамические характеристики объектов. Кроме того, замечено, что некоторые собственные значения не зависят от значений параметра тонкого включения.

6.1. Задача о равновесии составного стержня с шарниром, подпертым абсолютно жесткой опорой. Пусть на интервалах $(0,\xi),\ (\xi,l)\ \ (0<\xi<\infty)$ определено дифференциальное уравнение четвертого порядка

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(k\frac{d^2y}{dx^2}\right)=-\lambda\frac{d^2y}{dx^2}\,, \tag{60}$$

где $k = EJ$ – жесткость стержня на изгиб; E и J – соответственно его модуль упругости и осевой момент инерции сечения в точке x; $0<k_0\le k=k(x)\le k_1<\infty,\ \ k\Big|_{\bar{\Omega}_i}\in C^1(\bar{\Omega}_i)\cap C^2(\Omega_i),\ i=1,2;$

$\Omega_1=(0,\xi),\ \Omega_2=(\xi,l).$

На концах отрезка $[0,l]$ краевые условия имеют вид

$$y(0)=0,\ \ y(l)=0, \tag{61}$$

$$y''(0)=0,\ \ y'(l)=0 \tag{62}$$

(на правом конце – защемление, на левом – отсутствие изгибающего момента).

Наличие в точке $x=\xi$ шарнира конечной жесткости $\alpha>0$, подпертого жесткой опорой, учитывается ограничениями [18]

$$y^-=y^+=0, \tag{63}$$

$$[ky'']=0,\ \ \{ky''\}^{\pm}=\alpha[y']\,, \tag{64}$$

где $[\varphi]=\varphi^+-\varphi^-$, $\varphi^{\pm}=\varphi(\xi\pm 0)$.

Спектральная задача (60)–(64) описывает положения равновесия $y_i(x)$ (защемленного на одном конце и шарнирно опертого на другом, содержащего в точке $x=\xi$ подпертого абсолютно жесткой опорой шарнир конечной жесткости) составного стержня, соответствующие критическим значениям λ_i продольной сжимающей нагрузки λ. Эти критические значения λ_i являются собственными значениями, а отвечающие им $y_i(x)$ – собственными функциями задачи (60)–(64).

Пусть $\bar{M}=\{v(x):v\Big|_{\bar{\Omega}_i}\in\tilde{N}^3(\bar{\Omega}_i)\cap\tilde{N}^4(\Omega_i),\ i=1,2\}$, а M – множество функций $v(x)\in\bar{M}$, удовлетворяющих условиям (61)–(64).

Определение 4. Классическим решением спектральной краевой задачи (60)–(64) называется множество пар *{λ, u(x)}* ($\lambda\in R^1$, R^1 – множество вещественных чисел, $u\in\bar{M},\ u\neq 0)$, состоящих из собственного числа λ и соответствующей ему собственной функции u(x), для которых выполняются равенства (60)–(64).

Определение 5. Обобщенной (в слабой постановке) спектральной задачей, соответствующей краевой задаче (60)–(64), называется задача нахождения пар $(\lambda,u)\in R^1\times H$, $u\neq0$, удовлетворяющих уравнению

$$a(u,v) = b(u, v), \quad v \in H. \tag{65}$$

где

$$H=\{\bar{H}: v(0)=v(l)=v'(l)=0;$$
$$v^- = v^+ = 0\}, \ \ \bar{H}=\{v: v|_{\Omega_i}\in W_2^2(\Omega_i),\ i=1,2\},$$

$$a(u,v)=\int_0^l k\frac{d^2u}{dx^2}\frac{d^2v}{dx^2}dx+\alpha[u'][v'], \quad b(u,v)=\int_0^l \frac{du}{dx}\frac{dv}{dx}dx \tag{66}$$

Очевидно, что классическое решение задачи (60)–(64) является также и ее обобщенным решением.

Лемма 1. *Собственные функции* $u_n(x), u_m(x)\in H$*, соответствующие собственным значениям* λ_n,λ_m $(\lambda_n\neq\lambda_m)$ *задачи (65), ортогональны в смысле скалярных произведений* $a(u,v)$, $b(u,v)$. *Если собственная функция* $u_n(x)$, *соответствующая собственному значению* λ_n*, нормирована условием* $b(u_n,u_n)=1$*, то из (65) следует* $a(u_n,u_n)=\lambda_n$.

Приближенное решение $\{(\lambda^N,u_k^N)\}$ $(\lambda^N\in R^1,\ u_k^N\in H_k^N)$ задачи (65) можно найти с помощью метода конечных элементов. Для этого каждый из отрезков $[0,\xi]$, $[\xi,l]$ разобъем на элементарные отрезки

$$\bar{l}_i=[x_i,x_{i+1}],\ x_{i-1}<x_i<x_{i+1},\ i=\overline{0,N-1},\ i\neq\chi,\chi+1;\ x_0=0,\ x_\chi=\xi-0,$$
$$x_{\chi+1}=\xi+0,\ x_N=l;\ \bar{H}_k^N=\{v_k^N(x)\Big|_{\bar{\Omega}_s}\in C^1(\bar{\Omega}_s): s=1,2;$$
$$H_k^N=\left\{v_k^N\in\bar{H}_k^N: v_k^N(0)=0,\ v_k^N(l)=0,\ v_k^{N'}(l)=0,\ v_k^{N^-}=v_k^{N^+}=0\right\},$$
$$v_k^N(x)=\alpha_1^i+\alpha_2^i x+\cdots+\alpha_{k+1}x^k,\ x\in\bar{l}_i,\ i=\overline{0,N-1},\ i\neq\chi,\ k\geq3\}.$$

Поскольку $\forall v_k^N(x)\in H_k^N$ справедливо представление

$$v_k^N(x)=\sum_{i=1}^n v_i\varphi_i(x), \tag{67}$$

где v_i – значение функции $v_k^N(x)$ или ее производной в определенной узловой точке, $\{\varphi_i\}_{i=1}^n$ – базис пространства H_k^N, то из (65) получаем обобщенную алгебраическую задачу на собственные значения

$$AU^k=\lambda^N BU^k, \tag{68}$$

где $A=\{a_{ij}\}_{i,j=1}^n$, $B=\{b_{ij}\}_{i,j=1}^n$ – симметричные положительно определенные матрицы,

$$a_{ij} = a(\varphi_i, \varphi_j),\ \ b_{ij} = b(\varphi_i, \varphi_j)\,. \tag{69}$$

Задача (68) может быть решена с помощью известных методов.

Теорема 14. *Если собственные функции краевой спектральной задачи (60)–(64)* $u_i\Big|_{\bar\Omega_j} \in C^3(\bar\Omega_j) \cap C^{k+1}(\Omega_j)$ $(j = 1,2;\ \left|D^{k+1}u_i\right| < \infty)$, *то для ее приближенных собственных значений* λ_i^N*, получаемых в результате решения алгебраической спектральной задачи (68), справедлива оценка*

$$0 \le \lambda_i^N - \lambda_i \le c_i h^{2(k-1)}\,. \tag{70}$$

Если спектр рассматриваемой краевой задачи простой, то для ее приближенных собственных функций $u_{ki}^N(x) \in H_k^N$ $(i = \overline{1, n_k})$ имеет место оценка

$$\left\| u_i - è_{ki}^N \right\|_H \le c_i' h^{k-1}\,, \tag{71}$$

где $u_{ki}^N(x) = \sum_{l=1}^{n_k} U_{il}^k \varphi_l(x),\ U_{il}^k$ – l-я компонента i-го собственного вектора U_i^k, соответствующего i-му собственному значению λ_i^N алгебраической спектральной задачи (68), n_k – размерность пространства H_k^N с базисом $\{\varphi_l(x)\}_{l=1}^{n_k}$.

6.2. Задача о свободных колебаниях составного стержня с упруго опертым шарниром конечной жесткости. Предположим, что на интервалах $(0,\xi)$, (ξ, l) определено уравнение

$$(k\, y'')'' = \lambda\, p\, y, \tag{72}$$

где $p = \rho F$, ρ – плотность, а F – площадь поперечного сечения стержня, $0<p_0 \le p \le p_1 < \infty$, p_0, p_1=const. Коэффициент k определен в п. 6.1.

На концах отрезка $[0, l]$ заданы ограничения

$$y(0) = 0,\ \ y(l) = 0,\ y'(l) = 0\,, \tag{73}$$

$$-ky''\big|_{x=0} + cy'(0) = 0, \tag{74}$$

а в точке $x = \xi$ условия сопряжения имеют вид

$$[y] = 0, \tag{75}$$

$$[k\, y''] = 0,\ \{k\, y''\}^{\pm} = \alpha[y']\,,\ [(k\, y'')'] = -\beta\, y\,, \tag{76}$$

где c, α, β=const>0.

Спектральная задача (72)–(76) описывает свободные колебания жесткого защемленного на правом конце, упруго защемленного на левом, составного стержня, содержащего в точке $x = \xi$ упруго опертый шарнир с конечной жесткостью [18].

Определение 6. Обобщенной (в слабой постановке) спектральной задачей, соответствующей краевой (72)–(76), называется задача определения пар $(\lambda, u) \in R^1 \times H,\ u \neq 0,$ удовлетворяющих уравнению вида (65), где $H = \{v \in \bar{H} : v(0) = v(l) = v'(l) = 0,\ [v]\big|_{x=\xi} = 0\}$,

$$a(u,v) = \int_0^l k u'' v'' dx + \beta u(\xi) v(\xi) + \alpha [u'][v'] + c u'(0) v'(0),$$
$$b(u,v) = \int_0^l p\, u\, v\, dx. \qquad (77)$$

Очевидно, что классическое решение краевой спектральной задачи (72)–(76) является и ее обобщенным решением.

Приближенное обобщенное решение $(\{(\lambda^N, u_k^N)\}\ \lambda^N \in R^1, u_k^N(x) \in H_k^N = \{v_k^N(x) \in \bar{H}_k^N :\ v_k^N(0) = = v_k^N(l) = v_k^{N'}(l) = 0,\ [v_k^N] = 0\})$ задачи (72)–(76) найдем с помощью метода конечных элементов.

Для приближенного решения $\{(\lambda_k^N, u_k^N)\}$ имеет место теорема, аналогичная теореме 14.

6.3. Задача о свободных колебаниях составного стержня при упругом опирании и упругом защемлении его противоположных концов. Пусть на интервалах (0, ξ), (ξ, l) определено уравнение (72). В точке $x = \xi$ заданы условия сопряжения

$$[y] = 0, \qquad (78)$$

$$y''^{-} = y''^{+} = 0, \quad [(ky'')'] = -\beta\, y, \qquad (79)$$

а на концах отрезка [0, l] ограничения имеют вид

$$y(l) = 0,\ y''(0) = 0,\ (ky'')'\big|_{x=0} + c y(0) = 0,\ ky''\big|_{x=l} + \alpha\, y'(l) = 0 \qquad (80)$$

где β, c, α =const>0.

Спектральная задача (72), (78)–(80) описывает свободные колебания составного стержня, упруго опертого левым концом, упруго защемленным правым и содержащего в точке $x = \xi$ идеальный шарнир, расположенный на упругой опоре [18].

Определение 7. Обобщенной (в слабой постановке) спектральной задачей, соответствующей задаче (72), (78)–(80), называется задача нахождения пар (λ, u)$\in$R$^1 \times$H, u$\neq$0, удовлетворяющих уравнению вида (65), где $Í\ = \{v \in \bar{H} :$ v(l) = 0, [v]=0},

$$a(u,v) = \int_0^l k u'' v'' dx + A\ u(0) v(0) + \quad u(\ ) v(\ ) + \quad u\ (l) v\ (l), \qquad (81)$$

$$b(u,v) = \int_0^l p u v dx\,. \qquad (82)$$

Очевидно, что классическое решение краевой задачи (72), (78)–(80)

является и ее обобщенным решением.

Для приближенного решения $\{(\lambda_k^N, u_k^N)\}$ имеет место теорема, аналогичная теореме 14.

6.4. Задача о равновесии составного стержня, жестко и упруго защемленном на его противоположных концах. Предположим, что на интервалах $(0,\xi)$, (ξ, l) определено уравнение

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(k\frac{d^2y}{dx^2}\right) = -\lambda\frac{d^2y}{dx^2}, \tag{83}$$

где коэффициент $k = k(x)$ определен в п. 6.1.

На концах отрезка $[0, l]$ краевые условия имеют вид

$$\begin{gathered} y(0) = y(l) = y'(l) = 0, \\ -ky''\big|_{x=0} + cy'(0) = 0, \end{gathered} \tag{84}$$

где c=const>0.

В точке $x = \xi$ $(\xi \in (0,l))$ заданы условия сопряжения

$$\begin{gathered} y^- = y^+ = 0, \\ [ky''] = 0,\ \{ky''\}^{\pm} = \alpha[y'], \end{gathered} \tag{85}$$

где α=const>0.

Спектральная задача (83)–(85) описывает положения равновесия $y_i(x)$ составного стержня (жестко защемленного на правом конце, упруго защемленного на левом, содержащего в точке $x = \xi$ подпертый абсолютно жесткой опорой шарнир конечной жесткости), соответствующие критическим значениям λ_i продольной сжимающей нагрузки λ.

Определение 8. Обобщенной (в слабой постановке) спектральной задачей, соответствующей краевой задаче (83)–(85), называется задача определения пар $(\lambda, u) \in R^1 \times H,\ u \neq 0$, удовлетворяющих уравнению вида (65). Множество этих пар – обобщенное решение задачи (83)–(85), где $H = \{v \in \bar{H} : v(0) = v(l) = v'(l) = 0,\ v^- = v^+ = 0\}$,

$$\begin{gathered} a(u,v) = \int_0^l ku''v''dx + \alpha[u'][v'] + c\,u'(0)v'(0), \\ b(u,v) = \int_0^l \frac{du}{dx}\frac{dv}{dx}\,dx. \end{gathered} \tag{86}$$

Очевидно, что классическое решение краевой задачи (83)–(85) является и ее обобщенным решением.

Для приближенного решения $\{(\lambda_k^N, u_k^N)\}$ имеет место теорема, аналогичная теореме 14.

7. Оптимальное управление состояниями многокомпонентных распределенных систем. С целью сохранения грунтовых пластов в естественных или близких к ним состояниях, что особенно актуальным есть сегодня, с помощью определенных мероприятий, например, дренирования можно улучшить состояние многокомпонентных грунтов.

Поскольку состояние грунтовых сред определяют характеристики функционирования их основных процессов, которые в общем случае описываются математическими задачами в частных производных с разрывными решениями, получаем задачу определения таких параметров $u \in \mathbf{U}$ внешнего и внутреннего влияния, при которых минимизируется определенный функционал качества:

$$J(u) = \inf_{v \in \mathbf{U}_\partial} J(v), \qquad (87)$$

где

$$J(u) = \left\| C\, y(u) - z_g \right\|_{\mathbf{H}}^2 + (\mathbf{N}u, u)_{\mathbf{U}}, \quad (\mathbf{N}u, u)_{\mathbf{U}} \geq \nu_0 \left\| u \right\|_{\mathbf{U}}^2, \qquad (88)$$

z_g – известный элемент множества H, множество $\mathbf{U}_\partial$ – выпукло и замкнуто в U. Решение $u \in \mathbf{U}_\partial$ задачи (87) называется оптимальным управлением состоянием $y \in V$ рассматриваемой системы с функционалом качества J(u).

В монографиях [12, 13, 36] и др. исследованы вопросы оптимального управления состояниями разнообразных многокомпонентных распределенных систем (эллиптических (в том числе, условно–корректных), параболических, эллиптико–параболических, псевдопараболических, гиперболических, псевдогиперболических, систем упругого деформирования (условно стационарного и динамического) многокомпонентных тел, систем квазистатического деформирования, динамического вязко–упругого деформирования, прогибов составных стержневых систем (в том числе, с одним и двумя степенями свободы), прогибов составных тонких пластин (в том числе, при условиях многозначности обратного оператора состояния и динамических прогибов), термоупругого деформирования тел (в том числе, при условиях задания температурного состояния условно–корректной задачей Неймана и при условиях неединственного определения деформированного состояния составного тела) и др.

В результате этих исследований доказаны теоремы существования и единственности оптимального управления $u \in \mathbf{U}_\partial$ любой из указанных систем с функционалом качества (88) при условиях разнообразных управлений и наблюдений (в том числе, комплексных–векторных).

Для всех рассмотренных случаев получены необходимые и достаточные условия того, чтобы элемент $u \in \mathbf{U}_\partial$ был оптимальным управлением, которые определяются: прямой задачей о состоянии системы, соответствующей сопряженной задачей и неравенством

$$(Cy(u)-z_g,\, Cy(v)-Cy(u))_{\mathbf{H}} + (\mathbf{N}u,\, v-u)_{\mathbf{U}} \geq 0 \quad \forall v \in \mathbf{U}_\partial\,. \qquad (89)$$

В случае $\mathbf{U}_\partial = \mathbf{U}$ неравенство (89) переходит в равенство.

Для всех указанных выше задач при $\mathbf{U}_\partial = \mathbf{U}$ рассмотрена возможность построения вычислительных схем МКЭ повышенного порядка точности для численного определения оптимального управления $u = F(p, y)$, где y определяет состояние системы при управлении, а p – решение соответствующей сопряженной задачи.

Например, для задачи одновременного оптимального управления массовыми силами и распределенными источниками / стоками термоупругим состоянием тела, содержащем тонкую слабопрочную, слабопроницаемую прослойку γ с функционалом качества

$$J(u) = \int_\gamma ([y_s(u)] - z_g)^2 d\gamma + (\overline{a}u, u)\,, \qquad (90)$$

где $[y_s(u)]$ – скачок на γ касательного смещения $y_s(u)$, соответствующего управлению $u \in \mathbf{U}_\partial = \mathbf{U}$, z_g – заданный элемент из $L_2(\gamma)$, $u = (u_1, u_2)$, $u_1 = \{u_{1i}\}_{i=1}^3$, $\mathbf{U} = (L_2(\Omega))^3 \times L_2(\Omega)$, состояние системы описывается тождествами [13]

$$a(y, z_1) = l(\theta, u; z_1) \quad \forall z_1 \in V\,, \qquad (91)$$

$$a_0(\theta, z_2) = l_0(u;\, z_2) \quad \forall z_2 \in \Theta\,,$$

$$l(\theta, u; z_1) \equiv (f, z_1) + \int_\Omega \sum_{i,k,l,m=1}^{3} c_{iklm} \alpha\, \theta \delta_{lm}\, \varepsilon_{ik}\,(z_1) z_2 dx + (u_1,\, z_1), \qquad (92)$$

$$l_0(u; z_2) \equiv (\overline{f}, z_2) + (u_2,\, z_2)\,.$$

Здесь θ – температура тела, c_{iklm} – упругие постоянные, α – коэффициент температурного расширения, δ_{lm} – символ Кронекера, ε_{ik} – компоненты тензора деформаций, $a(\cdot,\cdot)$, $a_0(\cdot,\cdot)$ – некоторые билинейные формы

Сопряженная задача имеет вид

$$a(p, z_1) = -([y_s] - z_g,\, z_1)_{L_2(\gamma)} \quad \forall z_1 \in V\,, \qquad (93)$$

$$a_0(\theta^*, z_2) - \int_\Omega \sum_{i,k,l,m=1}^{3} c_{iklm} \alpha\, \delta_{lm}\, \varepsilon_{ik}\,(p) z_2 dx = 0 \quad \forall z_2 \in \Theta\,, \qquad (94)$$

а неравенство (89) приобретает вид

$$([y_s(u)] - z_g,\, [y_s(v)] - [y_s(u)])_{L_2(\gamma)} + (\overline{a}\,u,\, v-u) \geq 0 \quad \forall v \in U_\partial \qquad (95)$$

Задача (91)–(95) определяет оптимальное управление $u \in \mathbf{U}_\partial$, решение сопряженной задачи $Y^* = (y, \theta^*)$ и состояние системы $Y = (y, \theta)$.

8. Идентификация параметров многокомпонентных распределенных систем. На сегодняшний день очевидным является то, что с помощью современных информационных технологий можно успешно решать проблемы создания в сжатые сроки необходимые обществу объекты произвольного назначения, рационального природопользования, экологии и т.п. В этом смысле полезными будут самонастраиваемые на конкретный объект информационные технологии, то есть такие, которые путем учета определенных вспомогательных данных поведения объекта автоматически проведут уточнение неточно заданных исходных данных и позволят с достаточной точностью анализировать динамику исследуемых явлений при конкретных условиях влияния.

Решение проблемы самонастраивания определенных информационных технологий на конкретный объект требует обеспечения таких технологий средствами идентификации параметров объектов и параметров условий внешних влияний. Создание таких средств есть самостоятельной проблемой.

Вопросом идентификации параметров разнообразных технических объектов посвящено значительное количество научных работ. В решении указанных проблем довольно эффективными являются градиентные методы О.А. Алифанова, которые для определения (n+1)-го приближения u_{n+1} воспроизводимого параметра $u \in \mathbf{U}$ реализуют формулу

$$u_{n+1} = u_n - \beta_n p_n, \quad n = 0, 1, ..., n^*, \tag{96}$$

где для определения направления спуска p_n и коэффициента β_n необходимо знать градиент J'_{u_n} функционала–невязки

$$J(v) = \frac{1}{2}\left\| Av - \bar{f} \right\|_{\rho}^{2},$$

определенный в точке $v = u_n$, $Av = \{A_i v\}_{i=1}^{N}$, $A_i v = y(v)\big|_{\gamma_i}$ – след на γ_i состояния системы $y = y(v)$, а $\bar{f} = \{f_i\}_{i=1}^{N}$ – вектор данных натурных наблюдений на поверхностях γ_i, $i = \overline{1, N}$.

Следует отметить, что градиентные методы (96) также применимы для идентификации векторного, функционально–векторного или скалярного параметра $u \in \mathbf{U}$, однако погрешность полученного решения существенно зависит от выбора начальных приближений.

Авторами получены явные выражения градиента J'_{u_n} на каждом шаге итерационного процесса (96) идентификации разных, в том числе, и нескольких одновременно параметров, соответственно, эллиптических, параболических, эллиптико–параболических, псевдопараболических, гиперболических, псевдогиперболических многокомпонентных распределенных систем, идентификации составных стержневых систем, составных тонких пластин, многокомпонентных тел термоупругого деформирования и др.

Разработанная методология построения градиентов J'_{u_n} базируется на использовании решений прямых и соответствующих сопряженных задач, технология построения которых есть дальнейшим развитием технологии построения сопряженных задач, изложенной в роботах [12, 13, 36] при выяснении проблем оптимального управления состояниями разнообразных многокомпонентных распределенных систем.

Предложенная методика идентификации параметров распределенных систем градиентными методами базируется на теории оптимального управления [12, 13, 36]. На примере одновременной идентификации коэффициента температурного расширения, массовых сил, объемных источников тепла и коэффициента теплопроводности тела, которое находится в термоупругом режиме деформирования, следуя [29], приобретает вид.

Пусть в трехмерной области Ω определена следующая система термоупругого деформирования:

$$-\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial\sigma_{ik}(u_1,T;y)}{\partial x_k}=u_{2i}(x),\quad i=\overline{1,3}\,, \tag{97}$$

где $x=(x_1,x_2,x_3)$, $\sigma_{ik}(u_1,T;y)=\sum\limits_{l,m=1}^{3}c_{iklm}(\varepsilon_{lm}(y)-\delta_{lm}u_1T)$, σ_{ik} – компоненты тензора напряжений, ε_{lm} – компоненты тензора деформаций, $y_l=y_l(x)$ – проекция вектора смещений y на ось Ox_l декартовой системы координат; u_1 – коэффициент температурного расширения; δ_{lm} – символ Кронекера; c_{iklm} – упругие постоянные материала тела Ω ; u_{2i} – проекция массовой силы $u_2=u_2(x)$ на ось Ox_i.

В области Ω изменение температуры T удовлетворяет уравнению

$$-\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(u_{3i}\frac{\partial T}{\partial x_i}\right)=u_4\,, \tag{98}$$

где u_{3i} – коэффициент теплопроводности в точке x∈Ω в направлении оси Ox_i $(u_{3i}>0)$; $u_4=u_4(x)$ – мощность источника / стока в точке x∈Ω . Вектор $u=\{u_з\}_{i=1}^{4}$ подлежит идентификации.

На границе $\Gamma=\partial\Omega$ области Ω заданы краевые условия Дирихле

$$y=\varphi,\quad T=\varphi_0\,. \tag{99}$$

Считаем, что на N_1 непересекающихся поверхностях $\gamma_i^1\in\Omega$ и на N_2 непересекающихся поверхностях $\gamma_i^2\in\Omega$ известные, соответственно, смещения $y\big|_{\gamma_i^1}=f_i^1,\ i=\overline{1,N_1}$ и значения температуры

$T\Big|_{\gamma_i^2} = f_i^2, \; i=\overline{1,N_2}$.

При каждом фиксированном $u \in \mathbf{U}$ обобщенным решением краевой задачи (97)–(99) называется вектор–функция $Y=(y,T) \in H$, которая $\forall z=(z_1,z_2) \in H_0$ удовлетворяет системе тождеств

$$a(y,z_1) = l(u,T;z_1), \tag{100}$$

$$a_0(u;T,z_2) = l_0(u;z_2), \tag{101}$$

где

$$l(u,T;\,z_1) = \int\limits_{\Omega} \sum_{i,k,l,m=1}^{3} c_{iklm}\, u_1 T \delta_{lm}\, \varepsilon_{ik}(z_1)\, dx + (u_2, z_1),$$

$$a_0(u;T,z_2) = \int\limits_{\Omega} \sum_{i=1}^{3} u_{3i} \frac{\partial T}{\partial x_i} \frac{\partial z_2}{\partial x_i} dx, \quad l_0(u;\,z_2) = (u_4,\, z_2),$$

$$a(y,z_1) = \int\limits_{\Omega} \sum_{i,k,l,m=1}^{3} c_{iklm}\, \varepsilon_{lm}(y)\, \varepsilon_{ik}(z_1)\, dx.$$

Функционал–невязка имеет вид

$$J(u) = \sum_{i=1}^{N_1} \rho_i^1 \left\| y_i(u) - f_i^1 \right\|^2_{L_2(\gamma_i^1)} + \sum_{i=1}^{N_2} \rho_i^2 \left\| T_i(u) - f_i^2 \right\|^2_{L_2(\gamma_i^2)}, \tag{102}$$

где ρ_i^1, ρ_i^2 – весовые коэффициенты, $u=\{u_i\}_{i=1}^4 \in \mathbf{U}$.

При каждом фиксированном $u=u_n$ сопряженная задача состоит в нахождении вектор–функции $Y^*=(\psi,p) \in H_0$, которая $\forall z=(z_1,z_2) \in H_0$ удовлетворяет системе тождеств

$$a(\psi,z_1) = \sum_{i=1}^{N_1} \rho_i^1 (y(u_n) - f_i^1, z_1)_{L_2(\gamma_i^1)}, \tag{103}$$

$$a_0(u;p,z_2) - \int\limits_{\Omega} \sum_{i,k,l,m=1}^{3} c_{iklm} u_1 \delta_{lm}\, \varepsilon_{ik}(\psi) z_2 dx = \sum_{i=1}^{N_2} \rho_i^2 (T(u_n) - f_i^2, z_2)_{L_2(\gamma_i^2)}. \tag{104}$$

Учитывая тождества (100), (101), (103), (104), получаем

$$\langle J'_{u_n},\, \Delta u_n \rangle \approx \Delta u_1 \int\limits_{\Omega} \sum_{iklm=1}^{3} c_{iklm}\, \delta_{lm} T(u_n)\; \varepsilon_{ik}(\psi)\, dx +$$

$$+ (\Delta u_2,\, \psi) + (\Delta u_4,\, p) - \sum_{i=1}^{3} \Delta u_{3i} \int\limits_{\Omega} \frac{\partial T}{\partial x_i} \frac{\partial p}{\partial x_i}\, dx\,.$$

Следовательно,

$$J'_{u_n} \approx \tilde{\psi}_n,$$

где

$$\tilde{\psi}_n = \{\tilde{\psi}_{n_i}\}_{i=1}^4, \quad \tilde{\psi}_{n_1} = \int\limits_{\Omega} \sum_{i,k,l,m=1}^{3} c_{iklm}\, \delta_{lm} T(u_n)\, \varepsilon_{ik}(\psi)\, dx, \quad \tilde{\psi}_{n_2} = \psi \big|_{\Omega},$$

$$\tilde{\psi}_{n_3} = \{\tilde{\psi}_{n_3}^i\}_{i=1}^3, \quad \tilde{\psi}_{n_3}^i = -\int\limits_{\Omega} \frac{\partial T}{\partial x_i} \frac{\partial p}{\partial x_i} dx, \qquad \tilde{\psi}_{n_4} = p \big|_{\Omega}.$$

Выводы. Для множества многокомпонентных тел представлена технология их системного анализа (на основании теории оптимального управления идентификации их параметров и анализа с помощью схем повышенного порядка точности их состояний).

ЛИТЕРАТУРА

1. Боган Ю.А. Двумерная задача теории упругости для ортотронной плоскости с щелью при условиях контакта берегов вязкого трения // Прикл. механика и техн. физика. – 1999. – № 4. – С. 195–197.
2. Васидзу К. Вариационные методы в теории упругости и пластичности. – М.: Мир, 1987. – 542 с.
3. Галба Є.Ф. Зважена псевдоінверсія і умовно коректні еліптичні крайові задачі в математичному моделюванні: теорія, математичні моделі, обчислювальні методи. Автореф. дис. … д-ра фіз.-мат. наук. – Київ: Ін-т кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, 2001. – 34 с.
4. Дейнека В.С. Схемы повышенного порядка точности для решения уравнений равновесия толстой, подкрепленной ребрами оболочки вращения. Автореф. дис. … канд. физ.-мат. наук. – Киев: Ин-т кибернетики АН УССР, 1980. – 20 с.
5. Дейнека В.С. Численное решение краевой задачи, допускающей разрыв решения // ДАН УССР, Сер. А. – 1982. – № 11. – С. 28–31.
6. Дейнека В.С. Определение разрывных характеристик продольных колебаний составных стержней // Там же. – 1989. – № 9. – С. 8–11.
7. Дейнека В.С. Математические модели и алгоритмы МКЭ для задач с разрывными решениями. Автореф. дис. … докт. физ.-мат. наук. – Киев: Ин–т кибернетики АН УССР, 1991. – 37 с.
8. Дейнека В. С. Оптимальное управление эллиптическими многокомпонентными распределенными системами. – Киев: Наук. думка, 2005. – 364 с.
9. Дейнека В.С. Вычислительные алгоритмы повышенного порядка точности для условно–корректной задачи термоупругости // Компьютерная математика. – 2007. – № 1. – С. 3–12.
10. Дейнека В.С., Молчанов И.Н. Схемы метода конечных элементов для решения задач теории упругости // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 1981. – 21, № 2. – С. 452–469.
11. Дейнека В.С., Сергиенко И.В. Модели и методы решения задач в

неоднородных средах. – Киев: Наук. думка, 2001. – 606 с.
12. Дейнека В.С., Сергиенко И.В. Оптимальное управление неоднородными распределенными системами. – Киев: Наук. думка, 2003. – 506 с.
13. Дейнека В.С., Сергиенко И.В. Анализ многокомпонентных распределенных систем и оптимальное управление. – Киев: Наук. думка, 2007. – 703 с.
14. Дейнека В.С., Сергиенко И.В., Скопецкий В.В. Математические модели и методы расчета задач с разрывными решениями. – Киев: Наук. думка, 1995. – 262 с.
15. Дейнека В.С., Сергиенко И.В., Скопецкий В.В. Модели и методы решения задач с условиями сопряжения. – Киев: Наук. думка, 1998. – 616 с.
16. Коваленко А.Д. Термоупругость. – Киев: Вища школа, 1975. – 216 с.
17. Михлин С.Г. Проблема минимума квадратичного функционала. – М. – Л.: Гостехтеориздат, 1952. 216 с.
18. Самарский А.А., Андреев В.Б. Разностные схемы для эллиптических уравнений. – М.: Наука, 1976. – 352 с.
19. Сергиенко И.В., Дейнека В.С. К определению осесимметричного напряженного состояния составного тела при расклинивающем давлении // Прикл. механика. – 1999. – т. 35, № 1. – С. 50–57.
20. Сергієнко І.В., Дейнека В.С. Чисельне визначення напружено–деформованого стану тіла з розрізом за наявності розклинювального тиску // Доп. НАН України. – 1999. – № 10. – С. 67–71.
21. Сергієнко І.В., Дейнека В.С. Задачі трансмісії з неоднорідними головними умовами спряження та високоточні чисельні алгоритми їх дискретизації // Укр. матем. журн. – 2002. – т.54, № 2. – С. 258–275.
22. Сергиенко И.В., Дейнека В.С. Задачи с условиями сопряжения и вычислительные схемы повышенного порядка точности их дискретизации // Праці Українського математичного конгресу 2001. – Київ: Ін–т математики НАН України, 2002. – С. 106–120.
23. Сергиенко И.В., Дейнека В.С. Вычислительные алгоритмы для условно–корректной задачи прогибов составной балки // Доп. НАН України. – 2002. – № 7. – С. 77–82.
24. Сергиенко И.В., Дейнека В.С. О численном решении спектральной задачи исследования устойчивости и собственых колебаний составных стержней // Прикл. механика. – 2002. – т. 38, № 11. – С. 124–132.
25. Сергиенко И.В., Дейнека В.С. О численном моделировании прогибов составной тонкой пластины // Доп. НАН України. – 2003. – № 6. – С. 52–58.
26. Сергиенко И.В., Дейнека В.С. О численном решении задачи динамической теории упругости для тел со сосредоточенными массами // Прикл. механика. – 2004. – т. 40, № 12. – С. 38–48.
27. Сергиенко И.В., Дейнека В.С. Оптимальное управление условно–корректной системой термонапряженного состояния составного тела //

Пробл. управления и информатики. – 2006. – № 1–2. – С. 126–152.
28. Сергиенко И.В., Дейнека В.С. Численное моделирование прогибов составного стержня с одной степенью свободы // Доп. НАН України. – 2006. – № 11. – С. 81–89.
29. Сергиенко И.В., Дейнека В.С. Решение комплексных обратных задач термоупругости // Пробл. управления и информатики. – 2007. – № 5. – С. 64–87.
30. Сергиенко И.В., Дейнека В.С. Идентификация параметров составной тонкой пластины, находящейся под динамическим воздействием // Пробл. управления и информатики. – 2007. – № 6. – С. 33–56.
31. Сергиенко И.В., Дейнека В.С. Идентификация параметров многокомпонентных стержневых систем // Доп. НАН України. – 2008. – № 2. – С. 81–89.
32. Сергиенко И.В., Дейнека В.С., Скопецкий В.В. Задачи о динамическом равновесии сред с тонкими малопрочными включениями, их собственных значениях и формах.– Киев, 1989. – 42 с. – (Препр./ АН УССР. Ин–т кибернетики).
33. Сергиенко И.В., Скопецкий В.В., Дейнека В.С. Математическое моделирование и исследование процессов в неоднородных средах. – Киев: Наук. думка, 1991. – 432 с.
34. Сьярле Ф. Метод конечных элементов для эллиптических задач. – М.: Мир, 1980. – 512 с.
35. Тимошенко С.П. Курс теории упругости. – Киев: Наук. думка, 1972. – 508 с.
36. Sergienko I.V., Deineka V.S. Optimal Control of Distributed Systems with Conjugation Conditions. – New York: Kluwer Academic Publishers. – 2005. – 400 p.