УСЛОВИЯ СОХРАНЕНИЯ НЕПРЕРЫВНОСТИ ПРИ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИИ ФУНКЦИЙ

Димитрова-Бурлаенко С. Д.

Национальный Технический Университет «ХПИ»
Харьков, Украина

Рассмотрим функцию $f(t): R \to Y$, заданную на оси *R* со значениями в банаховом пространстве *Y*. В ряде случаев, сама функция непрерывна и дифференцируема в естественной топологии на оси. Если функция дополнительно непрерывна в более слабой топологии $\Im$, возникает вопрос: когда этим свойством обладает производная. В работе дан ответ на этот вопрос. Дано приложение этого результата для почти периодических, почти периодических по Левитану и почти автоморфных функций. Полученные результаты новые. До сих пор в основном от производной требовалась равномерная непрерывность на оси [4], [5] , [8], [9], [10]. В работе М.Г. Любарского [6] для числовых L–почти периодических функций впервые равномерная непрерывность требуется не на оси, а только в некоторой окрестности нуля, являющейся относительно плотным множеством. В настоящей работе развиваются эти идеи и получены результаты для абстрактных L–почти периодических функций, а также для произвольных функций, для почти периодических и для почти автоморфных функций.

Определение **1**. ([2], [9]). *Множество E называется относительно плотным множеством на группе R, если существует q элементов* $c_1, c_2, ..., c_q$ *таких, что*

$$R = \bigcup_{i=1}^{q} (c_i + E).$$

Определение 2. [4] *Непрерывная функция* $f(t): (-\infty, +\infty) \to Y$ *называется почти периодической, если семейство функций* $\{f(x+h)\}$ $(-\infty < h < \infty)$ *компактно в смысле равномерной сходимости на всей оси (т. е. если из каждой бесконечной последовательности функций* $f(x+h_1)$*,* $f(x+h_2)$*,… можно выбрать равномерно сходящуюся на всей оси подпоследовательность).*

Определение **3**. ([2],[3],[4],[5],[9]) *Функция* $f(t): (-\infty, +\infty) \to Y$ *называется L–почти периодической (почти периодической по Левитану), если* $\forall \varepsilon > 0$ *и конечного множества M существует относительно плотное множество* $E \subset (-\infty; \infty)$ *такое, что* $E - E \subset B_{M,f,\varepsilon}$ *, где*

$$B_{M,f,\varepsilon} = \left\{ \tau \in R : \max_{t \in M} \left\| f(t+\tau) - f(t) \right\| \right\} < \varepsilon.$$

Предложение 1. ([2]) *Любая L–почти периодическая функция* $f(t):(-\infty,+\infty)\to Y$ *непрерывна на оси в топологии, определенной множествами*

$$B_{M,f,\varepsilon}=\left\{\tau\in R:\max_{t\in M}\left\|f(t+\tau)-f(t)\right\|\right\}<\varepsilon .$$

Предложение 2. ([2])*Пусть задана L–почти периодическая функция* $f(t):(-\infty,+\infty)\to Y$ *и по ней введена топология* $\Im_f$ *множествами* $B_{M,f,\varepsilon}$ *на оси. Любая функция* $g(x):(-\infty,+\infty)\to Y$*, которая непрерывна в топологии* $\Im_f$ *, является L–почти периодической функцией.*

Функцию будем называть компактной, если ее множество значений относительно компактно в банаховом пространстве Y.

Определение 4. *Компактные L–почти периодические функции называются почти автоморфными.* (см.[10], [9], [5])

Предложение 3.[7]. *Непрерывная функция* $f(t):(-\infty,+\infty)\to Y$ *является почти периодической, если для любого* $\varepsilon>0$ *множество*

$$U_{\varepsilon}=\left\{\tau:\sup_{t\in R}\left\|f(t+\tau)-f(t)\right\|<\varepsilon\right\}$$

относительно плотно на оси.

Сформулируем необходимые и достаточные условия непрерывности производной в более слабой топологии.

Теорема 1. *Пусть* $f(t):R\to Y$ *имеет конечную производную в любой точке оси в естественной топологии* $\Im_0$ *и* $f(t)$ *непрерывна в более слабой топологии* $\Im$ $(\Im\prec\Im_0)$. *Для непрерывности производной* $f'(t)$ *в более слабой топологии* $\Im$ *необходимо и достаточно, чтобы для любой пары* (ε,x) $\varepsilon>0$ *и* $x\in(-\infty;\infty)$ *существовала окрестность нуля* U *в топологии* $\Im$ *и интервал* $(-\delta;\delta)$, $\delta>0$ *такие, что*

$$\sup_{t\in x+U}\left\|f'(t+h)-f'(t)\right\|<\varepsilon,\qquad \forall h\in(-\delta;\delta).$$

Доказательство. *Необходимость.* Пусть производная $f'(t)$ непрерывна в топологии $\Im$. По $\varepsilon>0$ и точке $x\in R$ выбираем окрестность нуля V (в топологии $\Im$) так, чтобы

$$\left\|f'(x)-f'(x+\theta)\right\|<\frac{\varepsilon}{2},\quad \theta\in V .$$

По окрестности V выбираем окрестность нуля U так, чтобы

$$U+U\subset V .$$

Окрестность U является окрестностью и в естественной топологии $(\Im\prec\Im_0)$. Выберем $\delta>0$ так чтобы $(-\delta;\delta)\subset U$. Тогда по неравенству треугольника,

$$\left\| f'(t+h)-f'(t) \right\| \le \left\| f'(x)-f'(t) \right\| + \left\| f'(t+h)-f'(x) \right\| < \varepsilon ,$$

так как $t\text{-}x \in U$, если $t \in x+U$ и при $h \in (-\delta;\delta)$,

$$t+h\text{-}x = (t\text{-}x)+h \subset U+U \subset V , \qquad t+h \in x+V$$

Таким образом,

$$\sup_{\substack{t\in x+U \\ h\in(-\delta;\delta)}} \left\| f'(t+h)-f'(t) \right\| < \varepsilon .$$

Достаточность. Каждому элементу $x \in (-\infty,+\infty)$ и числу $\varepsilon > 0$ сопоставим множество $\Gamma(x,\varepsilon,\delta_x) = x + U_x$ из условия теоремы так, что при $|h| < \delta_x$ и $t \in x + U_x$

$$\left\| f'(t+h)-f'(t) \right\| < \varepsilon .$$

Множества $\Gamma(x,\varepsilon,\delta_x)$, $x \in R$ открыты и образуют покрытие всей оси.

Определим последовательность функций

$$\phi_n(t) = n\left[f\left(t+\frac{1}{n}\right) - f(t) \right].$$

Она сходится поточечно к производной $f'(t)$, т.е.,

$$\lim_n \phi_n(t) = f'(t) \quad \forall t \in R .$$

Пусть $y^* \in Y^*$, $\left\| y^* \right\| = 1$. Применим теорему о среднем и получим:

$$\langle y^*, n\left[f\left(t+\frac{1}{n}\right) - f(t) \right] \rangle = \langle y^*, f \rangle' \left(t+\frac{\theta}{n}\right),$$

где $\theta \in (0,1)$ зависит от функционала y^* и от числа n. Из неравенства

$$\left| \langle y^*, \varphi_n(t) \rangle - \langle y^*, f \rangle'(t) \right| = \left| \langle y^*, f \rangle' \left(t+\frac{\theta}{n}\right) - \langle y^*, f \rangle'(t) \right| \le$$

$$\le \sup_{\substack{t\in x+U_x \\ h\in(-\delta_x,\delta_x)}} \left\| f'(t+h) - f'(t) \right\| < \varepsilon$$

получаем при $t \in \Gamma(x,\varepsilon,\delta_x)$

$$\left\| \varphi_n(t) - f'(t) \right\| < \varepsilon$$

Каждый компакт $[-m,m]$ можно покрыть конечным числом окрестностей вида $\Gamma(x,\varepsilon,\delta_x)$ и используя представление

$R = \bigcup_{m=1}^{\infty}[-m,m]$ можно выбрать счетное покрытие оси окрестностями вида $\{\Gamma(x_n,\varepsilon,\delta_n)\}$.

Сопоставим последовательности открытых в топологии $\Im$ множеств $\{\Gamma(x_n,\varepsilon,\delta_n)\}$ последовательность чисел $M_n = \left[\frac{1}{\delta_n}\right] + n$ так, чтобы

$$\left\| f'(t) - \varphi_{k_n}(t) \right\| < \varepsilon \text{ при } t \in \Gamma(x_n,\varepsilon,\delta_n), \quad k_n = M_n .$$

Таким образом, последовательность $\{\varphi_k(t)\}$ квазиравномерно сходится к $f'(t)$. По теореме Александрова [1], функция $f'(t)$ непрерывна в топологии $\Im$.

Теорема *2*. *Пусть функция* $f(t) : R \to Y$ *имеет конечную производную в любой точке оси R в естественной топологии* $\Im_0$ *и равномерно непрерывна в более слабой топологии* $\Im$ $(\Im \prec \Im_0)$. *Для равномерной непрерывности производной* $f'(t)$ *в более слабой топологии* $\Im$ *необходимо и достаточно, чтобы производная* $f'(t)$ *была равномерно непрерывной на оси R в естественной топологии* $\Im_0$.

Доказательство. Необходимость непосредственно следует из того, что любая окрестность в топологии $\Im$ содержит интервал $(-\delta;\,\delta)$.

Достаточность. По заданному $\varepsilon > 0$, используя равномерную непрерывность производной в топологии $\Im_0$ выбираем $\delta > 0$ так, чтобы

$$\sup_t \left\| f'(t+h) - f'(t) \right\| < \varepsilon \qquad \text{при } |h| < \delta .$$

По $\varepsilon > 0$ и $n > N_0 = \left[\frac{1}{\delta}\right] + 1$ имеем

$$\sup_t \left\| \phi_n(t) - f'(t) \right\| \le \sup_t \; n\int_0^{1/n} \left\| f'(t+\tau) - f'(t) \right\| d\tau < \varepsilon ,$$

где последовательность $\phi_n(t)$ как в предыдущей теореме. Последовательность $\{\phi_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ из равномерно непрерывных функций в топологии $\Im$ сходится равномерно к функции $f'(t)$. Следовательно, производная является равномерно непрерывной функцией в топологии $\Im$.

Приложим теперь полученные результаты к *L*–почти периодическим, почти автоморфным и почти периодическим функциям.

Теорема 3. *Пусть непрерывная функция* $f(t):(-\infty,+\infty)\to Y$ *L–почти периодическая, и ее производная непрерывна. Для L–почти периодичности производной* $f'(t)$ *необходимо и достаточно, чтобы для любой пары* (ε, x) $\varepsilon>0$, $x\in(-\infty,+\infty)$ *существовали интервал* $(-\delta,+\delta)$ *и окрестность нуля* $B_{M,f,\varepsilon}$, *где M – конечный набор чисел и*

$$B_{M,f,\varepsilon}=\left\{\tau:\sup_{t\in N}\left\| f(t+\tau)-f(t)\right\|<\varepsilon\right\},$$

такие, что :

$$\sup_{t\in x+B_{M,f,\varepsilon}}\left\| f'(t+h)-f'(t)\right\|<\varepsilon,\quad \forall h\in(-\delta,+\delta).$$

Доказательство. На оси вводим топологию $\Im_M$ с помощью окрестностей нуля

$$B_{M,f,\varepsilon}=\left\{\tau:\sup_{t\in N}\left\| f(t+\tau)-f(t)\right\|<\varepsilon\right\}.$$

В этой топологии функция $f(t)$ непрерывна согласно предложению 1 и выполнены условия теоремы 1. Следовательно, производная непрерывна в топологии $\Im_M$ и это означает, что она почти периодична по Левитану согласно предложению 2.

Теорема 4. *Пусть непрерывная функция* $f(t):(-\infty,+\infty)\to Y$ *почти автоморфна и ее производная непрерывна и компактна. Для почти автоморфности* $f'(t)$ *необходимо и достаточно, чтобы для любой тройки* (y^*,ε,x) , $y^*\in Y^*,\left\|y^*\right\|\le 1,\varepsilon>0$, $x\in(-\infty,+\infty)$ *существовали интервал* $(-\delta,+\delta)$ *и окрестность нуля* $B_{M,f,\varepsilon}$, *где M конечный набор чисел*
,

$$B_{M,f,\varepsilon}=\left\{\tau:\max_{t\in M}\left\| f(t+\tau)-f(t)\right\|<\varepsilon\right\},$$

такие, что:

$$\sup_{t\in x+B_{M,f,\varepsilon}}\left|\left\langle y^*,f'(t+h)-f'(t)\right\rangle\right|<\varepsilon,\quad \forall h\in(-\delta,+\delta).$$

Доказательство. Необходимость условий непосредственно вытекает из определения почти автоморфности и теоремы 3.

Достаточность. Из теоремы 3 следует, что производная $f'(t)$ слабо почти периодическая функция Левитана. Производная $f'(t)$ слабо непрерывна на оси в топологии $\Im_M$, введенной с помощью множеств $B_{M,f,\varepsilon}$. Из слабой непрерывности и компактности производной следует ее сильная непрерывность в топологии $\Im_M$. По предложению 2 производная

$f'(t)$ является L–почти периодической функцией. Любая компактная почти периодическая функция Левитана является почти автоморфной. Следовательно, $f'(t)$ – почти автоморфная функция.

Отметим, что условие компактности производной $f'(t)$ существенно и не может быть пропущено. Для этого достаточно рассмотреть почти автоморфную функцию $f(t) = \cos\frac{1}{2+\sin x+\sin\left(\sqrt{2}x\right)}$, производная которой является неограниченной почти периодической функцией Левитана

$$f'(x) = \sin\frac{1}{2+\sin x+\sin\left(\sqrt{2}x\right)}\left(\frac{1}{\left(2+\sin x+\sin\left(\sqrt{2}x\right)\right)^2}\right)\left(\cos x+\sqrt{2}\cos\left(\sqrt{2}x\right)\right).$$

Введем множество S_f всех числовых последовательностей $s=\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$, для которых равномерно сходится последовательность $\{f(t+s_n)\}_{n=1}^{\infty}$ к $f_s(t)$.

Теорема 5. *Пусть функция* $f(t):(-\infty,+\infty)\to Y$ *почти периодическая и имеет непрерывную и компактную производную* $f'(t)$. *Для почти периодичности производной* $f'(t)$ *необходимо и достаточно, чтобы для любой функции* $f_s(t)$ *выполнялись условия теоремы 4.*

Необходимость: Если производная почти периодична, то она компактна и равномерно непрерывна. Любая сдвижка производной $f_s'(t)$ почти периодична и, значит, почти автоморфна и выполняет условия теоремы 4.

Достаточность: Применяя теорему 4 в сторону достаточности, получаем, что $f_s'(t)$ является почти автоморфной функцией. Применяя теорему Вича [10] к числовым почти автоморфным функциям $\langle y^*, f_s'(t)\rangle$, $s\in S_f$ $y^*\in Y^*$, получаем, что функция $f'(t)$ слабо почти периодическая. Используя компактность, получаем [5], что она сильно почти периодична.

Полученные результаты сформулированы для абстрактных функций со значениями в пространствах Банаха. Они легко переносятся на функции со значениями в пространствах Фреше.

ЛИТЕРАТУРА

1. Александров П. С. Введение в общую топологию множеств и функций – М.: ОГИЗ. – 1948. – 368с.
2. Димитрова-Бурлаенко С.Д. Представление L – почти периодических функций как непрерывные функции на топологической группе. // Вісник національного технічного університету „ХПІ” – Харків: НТУ”ХПІ”. – 2010. – №68. – С.65– 75.
3. Левин Б.Я. О почти периодических функциях Левитана. // УМЖ. – 1949. – т.1, № 1. – С. 49– 101.
4. Левитан Б.М., Почти периодические функции. – М., Гостехиздат. – 1953. – 397с.
5. Левитан Б. М., Жиков В.В. Почти периодические функции и дифференциальные уравнения. Изд– во МГУ. – 1978. – 205с.
6. Любарский М. Г. О неопределенном интеграле почти периодической по Левитану функции. // Теория функций, функциональный анализ и их приложения, вып. 16. Изд– во ХГУ. – 1972. – С.139– 150.
7. Dimitrova-Burlayenko S.D. On continuity properties of almost–periodic functions. // Euromech 498 Colloquium. Book of Abstracts. – 2008. – P.1– 4.
8. Amerio L., Prouse G. Almost– periodic functions and functional equations. N.Y., Van Nostrand Reinhold Company. – 1971. – 184 p.
9. Reich A. Präkompakte Gruppen and Fastperiodizität // Math. Z.,116, p.216–234.
10. Veech W. A. Almost automorphic functions on groups // Amer. J. Math. – 1965. – v.87, N3. – P.719–751.