

СПОСОБЫ ПОВЫШЕНИЯ ЭФФЕКТИВНОСТИ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Зеленцов Д.Г., Короткая Л.И.

ГВУЗ «Украинский государственный химико-технологический
университет», Днепропетровск, Украина

Технологические процессы в таких отраслях промышленности как химическая, металлургическая, горная, предполагают контакт конструкционных элементов оборудования с агрессивными рабочими средами. В качестве основного дестабилизирующего воздействия таких сред следует рассматривать коррозионный износ – разрушение поверхностного слоя металла. Это приводит к изменению начальных геометрических параметров элементов, снижению их функциональной способности, преждевременному, нередко аварийному, выходу из строя конструкции в целом. Актуальность проблемы определения ресурса конструкции, обеспечение её работоспособности в течение заданного срока времени, таким образом, не вызывает сомнений.

Решение данной задачи предполагает наличие модели поведения конструкции в агрессивной среде. Будем рассматривать лишь те модели процесса накопления геометрических повреждений, в которых скорость коррозии зависит от напряжений, в свою очередь изменяющихся с течением времени [1].

$$\frac{d\delta}{dt} = v_0 \Psi\{\sigma(t)\}. \quad (1)$$

Здесь t – время; v_0 – скорость коррозии при отсутствии напряжений; σ – абсолютное значение эквивалентного напряжения; δ – глубина коррозионного поражения, $\Psi\{\sigma(t)\}$ – некоторая известная функция.

Если закон изменения напряжений во времени известен, например, они зависят только от геометрических размеров элемента, то уравнение (1) может быть сведено к уравнению с разделяющимися переменными и решено, либо аналитически [2], либо, в большинстве случаев, численно.

В статически неопределимых системах изменение геометрических размеров их элементов влияют на изменение напряжений как непосредственно, уменьшая площадь сечения, так и опосредовано, вызывая изменение внутренних усилий. Тогда напряжение в некотором элементе конструкции будет зависеть не только от его геометрических характеристик, но и в различной степени всех остальных её элементов.

$$\frac{d\delta_i}{dt} = v_0 \Psi\{\sigma_i(\delta_i, Q_i(\bar{\delta}))\}, \quad i = \overline{1, N}, \quad (2)$$

где Q_i – усилие в i -м элементе, N – количество параметров, определяющих размеры конструкции.

Не останавливаясь подробно на описании этой модели, отметим, что определить состояние конструкции в некоторый момент времени или оценить её долговечность можно путём решения задачи Коши для системы дифференциальных уравнений (СДУ) вида (2).

Высокая размерность СДУ (2) (количество уравнений может достигать нескольких сотен, а иногда – тысяч), а также невозможность аналитического представления функций напряжений в правых частях делает возможным лишь численное её решение. Более того, определение напряжений в конструкции с произвольной геометрией, граничными условиями и условиями нагружения также возможно лишь с использованием численных методов, например, метода конечных элементов (МКЭ) [3].

При решении СДУ (2) задача МКЭ решается в каждом узле временной сетки:

$$\delta_i^s = \delta_i^{s-1} + \Delta t^s \cdot v_0 \cdot \psi(\sigma_i^{s-1}(\delta^{s-1})), \quad i = \overline{1, N}, \quad (3)$$

где s – номер итерации, Δt – шаг интегрирования.

Если размерность задачи МКЭ достаточно большая, то вычислительные затраты могут оказаться чрезмерно высокими, прежде всего в задачах оптимального проектирования. В этом случае для известных постановок функции ограничений предполагают определение долговечности конструкции на каждом шаге поиска оптимального проекта [4].

Проблема повышения эффективности алгоритмов решения СДУ может быть решена, в том числе, следующими способами:

- обоснованным выбором численного метода решения задачи Коши;
- определением рационального шага интегрирования СДУ (такого шага, который при минимальном количестве итераций обеспечивал бы получение решения с погрешностью не превышающей предельно допустимой).

Рассмотрим подробнее оба способа. Выбор численного метода решения задачи Коши может быть сделан на основе анализа поведения функции правой части дифференциального уравнения (2). Для определённости в качестве корродирующего элемента рассмотрим стержень кольцевого сечения при одноосном нагружении. Зависимость напряжений от времени будет определяться формулой:

$$\sigma(t) = \frac{Q}{\pi((R - \delta)^2 - r^2)}, \quad (4)$$

где R и r – соответственно внешний и внутренний радиусы элемента.

График этой зависимости представлена на рис.1; точка τ соответствует тому времени, когда $\delta(t) = R - r$, и является точкой разрыва второго рода. Долговечность элемента определяется абсциссой точки А, ордината которой соответствует предельному значению напряжения $[\sigma]$. При численном решении согласно формуле (3) не исключается случай, когда точка разрыва второго рода может оказаться между узлами.

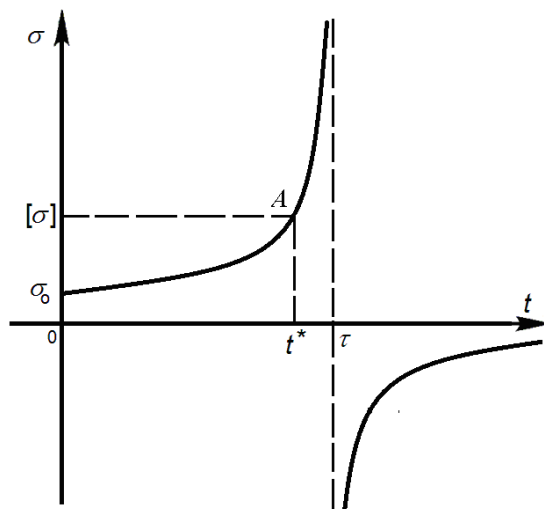


Рис. 1 – График зависимости “напряжение – время”.

Очевидно, что если в точке t_i условие прочности выполняется, то состояние конструкции считается допустимым и алгоритм предполагает следующий шаг интегрирования уравнения, приводящее систему в точку t_{i+1} , не принадлежащую окрестности τ (рис.2а). В результате такого действия будет получено, заведомо, неверное решение. Эта ситуация может быть отслежена путём контроля знака разности $((R - \delta) - r)$; при её возникновении можно вернуться в точку t_i и продолжить решение с меньшим шагом Δt .

В случае ситуации, изображённой на рис. 2б, точка t_{i+1} попадает в окрестность точки τ . Знаменатель дроби в выражении (4) становится бесконечно малой величиной, при этом может возникать нештатное завершение программы («деление на ноль»). Решение задачи приходится начинать заново с новым значением Δt , что, впрочем, не является гарантией не повторения описанной ситуации.

Вероятность того, что точка разрыва второго рода окажется между узлами возрастает пропорционально увеличению шага интегрирования. Это

ставит под сомнение преимущества одношаговых численных методов высших порядков. Именно этим и объясняется тот факт, что в большинстве известных работ для решения СДУ используется метод Эйлера.

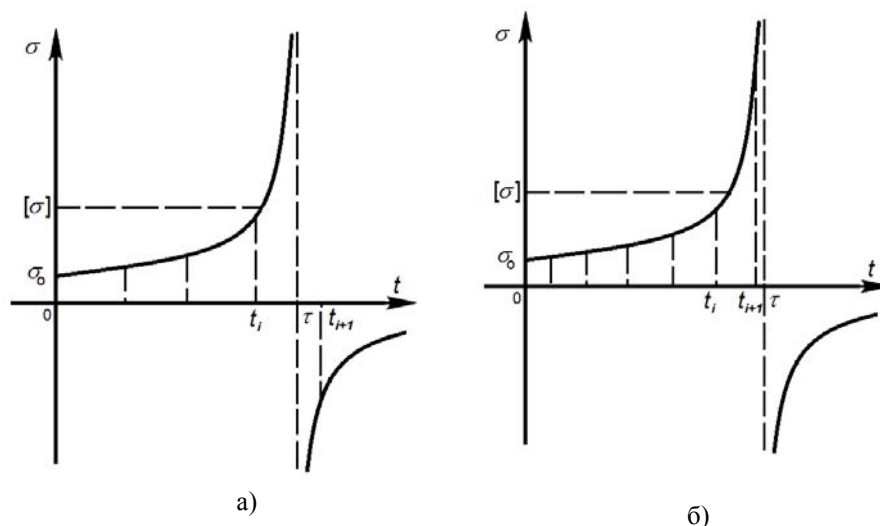


Рис. 2 – Нежелательные ситуации, возникающие при численном решении. Пояснения в тексте.

Если решать задачу этим методом, то повышение эффективности может быть достигнуто путём рационального выбора шага интегрирования Δt . В известных работах величина Δt является параметром задачи оптимизации и не изменяется в процессе её решения. Так как варьируемые параметры, определяющие геометрические характеристики системы, изменяются в широком диапазоне, то для одного подмножества пространства решений требуемая точность не достигается (погрешность превышает допустимое значение), а для другого подмножества число итераций является избыточным. Представляется очевидным, что повышение эффективности алгоритма при соблюдении требуемой точности может быть достигнуто лишь с помощью управления погрешностью решения СДУ.

Авторами предлагается новый подход к решению проблемы повышения эффективности численных алгоритмов решения СДУ, описывающих коррозионный процесс, с использованием искусственных нейронных сетей (НС). Задача НС состоит в определении на основе имеющейся информации о геометрических параметрах элементов конструкции, параметрах агрессивной среды (АС), начального и предельного напряжений такого шага интегрирования СДУ, при котором погрешность решения не превышает предельно допустимого.

Исходя из анализа факторов, которые, помимо шага интегрирования, влияют на погрешность численного решения, авторами предложена архитектура НС (многослойный персептрон), выступающей в роли нейроконтроллера. Не вдаваясь в подробное описание выбора архитектуры НС (рис. 3), функций активации [5], отметим, что сеть была обучена с помощью алгоритма обратного распространения ошибки. Для предотвращения замкнутых циклов порядок подачи обучающих образцов проводился случайным образом.

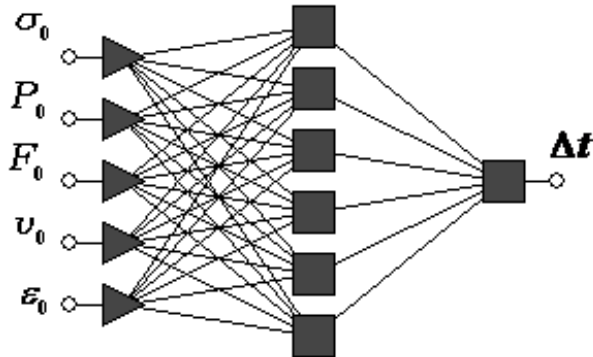


Рис. 3 – Архитектура нейронной сети

Остановимся подробнее на процедуре получения обучающей выборки.

Воспользуемся тем, что в некоторых случаях возможно аналитическое решение для отдельного уравнения системы (2). Так, например, для стержня при постоянном одноосном нагружении и модели коррозионного износа [6]:

$$\frac{d\delta}{dt} = v_0 \cdot (1 + k\sigma), \quad (5)$$

получена аналитическая формула, позволяющая определить время, за которое напряжение в стержне изменится от значения σ_0 до σ_1 [7].

$$t_{\text{ан}}^* = t_0 - \frac{2kQ}{v_0 \cdot |d|} \left\{ \arctg \frac{2a\delta + b}{|d|} - \arctg \frac{b}{|d|} \right\}. \quad (6)$$

Здесь A_0 , P_0 – площадь и периметр сечения в начальный момент времени; Q – величина осевого усилия; $t_0 = \delta(t^*) / v_0$; a – коэффициент формы сечения; $b = -P_0$; $c = A_0 + kQ$; $d = \sqrt{|b^2 - 4ac|}$; $d \neq 0$; $\delta(t^*)$ –

глубина коррозионного износа, соответствующая предельному значению напряжения; k – коэффициент влияния напряжения на скорость коррозии.

Таким образом, формула (6) позволяет получить точное решение в предположении, что осевое усилие постоянно во времени. Задача состоит в определении такого наибольшего значения шага интегрирования Δt , при котором погрешность численного решения $t^*(\Delta t)$ относительно аналитического не превышает предельно допустимого значения ε^* :

$$\frac{|t_{ан}^* - t^*(\Delta t)|}{t_{ан}^*} \leq \varepsilon^* . \quad (7)$$

Рассматривая выражение (7), как нелинейное уравнение и решая его каким-либо численным методом, можно получить значение Δt , обеспечивающее для данного образца заданную точность численного решения дифференциального уравнения.

Количество учебных образцов для обучения и тестирования НС принималось с учётом рекомендаций, приведенных в [5].

Для численной иллюстрации предложенного подхода рассматривается решение задачи долговечности стержня растянутого силой Q . На рис. 4 приведены кривые роста напряжений для стержней с различными площадями поперечных сечений и осевой нагрузкой. Размеры сечений и величины нагрузки подбирались таким образом, чтобы долговечность стержня, определяемая по аналитической формуле (6), была равна $t^* = 8,00$ годам.

Численное решение задачи было получено, в том числе, с применением нейроконтроллера. Для определения погрешности решения использовались значения напряжений в момент времени t^* . При получении решения методом Эйлера с величиной шага интегрирования $\Delta t = 0,25$ года его погрешность составила 0,34% при $[\sigma]/\sigma_0 = 2$ (кривая 1); 2,44% при $[\sigma]/\sigma_0 = 6$ (кривая 2) и 25,06% при $[\sigma]/\sigma_0 = 16$ (кривая 3). При этом периметр сечения стержня составлял $A_0 = 52,89 \text{ см}^2$, коэффициент слитности $\eta = 0,49 \text{ см}^{-1}$ (кривая 1), значение напряжений оказались равными $\sigma = 239,18 \text{ Мпа}$; $A_0 = 9,36 \text{ см}^2$, $\eta = 1,16 \text{ см}^{-1}$ (кривая 2) - $\sigma = 234,14 \text{ Мпа}$; $A_0 = 4,83 \text{ см}^2$, $\eta = 1,61 \text{ см}^{-1}$ (кривая 3) - $\sigma = 179,85 \text{ Мпа}$.

В табл. 1 приведены результаты численного решения с использованием нейроконтроллера, как управляющего механизма, позволяющего определить параметры численных процедур с погрешностью, не превышающей предельно допустимую.

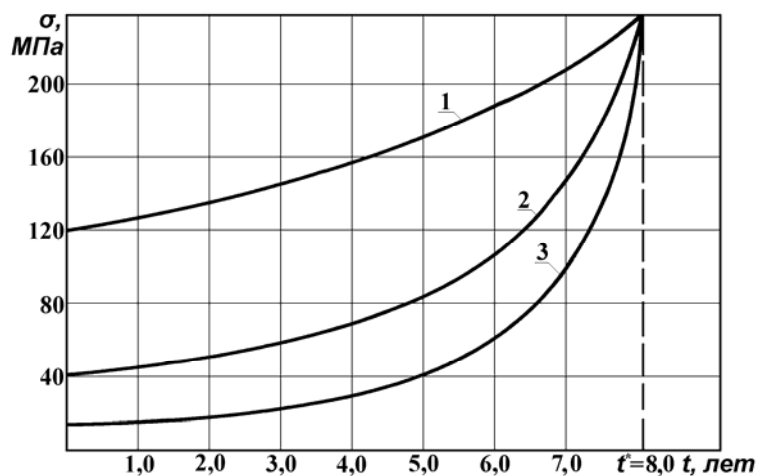


Рис. 4 – Изменение напряжений во времени для трёх образцов

Табл.1. Результаты численного решения с использованием нейроконтроллера.

Предельно допустимая погрешность, %	№ стержня	Δt , лет	σ , МПа	Получаемая погрешность, %
≤ 3	1	0,743	233,04	2,90
	2	0,261	233,56	2,81
	3	0,043	232,94	2,94
≤ 6	1	1,015	226,08	5,81
	2	0,604	225,79	5,92
	3	0,079	225,89	5,88
≤ 10	1	1,629	220,56	8,92
	2	0,897	218,30	9,04
	3	0,107	216,82	9,66

Результаты, приведенные в таблице 1, позволяют сделать следующие выводы:

- использование нейроконтроллера позволяет избежать избыточных итераций при численном решении СДУ, описывающих коррозионный процесс, и, тем самым, повысить эффективность вычислительного алгоритма;

- впервые получена возможность управления точностью решения таких систем, то есть в качестве параметра задачи может выступать не шаг

интегрирования системы вида (2), а предельно допустимая погрешность её решения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Овчинников И.Г. Определение долговечности элементов конструкций, взаимодействующих с агрессивной средой / И.Г. Овчинников, В.В. Петров // Строит. Механика и расчет сооружений. – 1982. – № 2. – с. 8 – 10.
2. Зеленцов Д.Г. Расчет конструкций с изменяющейся геометрией в агрессивных средах. Стержневые системы. – Днепропетровск: УГХТУ, 2002. – 168 с.
3. Зеленцов Д.Г. Новые конечные элементы переменной жесткости для расчета конструкций, подверженных коррозионному износу/ Д.Г. Зеленцов // Сборник научных трудов Национальной горной академии Украины. – Днепропетровск: «Навчальна книга», 2002. - №13. – Т. 2. – С. 169 – 174.
4. Зеленцов Д.Г. Оптимальное проектирование корродирующих конструкций при интервальных характеристиках параметра агрессивной среды. Д.Г. Зеленцов, Л.И. Короткая // Системні технології. [Регіональний міжвузівський збірник наукових праць]. –2010. – Вип. 4 (69).– С. 51 – 57.
5. Короткая Л.И. Использование нейронных сетей при численном решении некоторых систем дифференциальных уравнений. / Л.И. Короткая. // Восточно-европейский журнал передовых технологий. –2011. - № 3-4 (51).– С. 24 – 27.
6. Долинский, В.М. Расчёт нагруженных труб, подверженных коррозии // Химическое и нефтяное машиностроение. – 1967. – № 2. – с. 9 – 10.
7. Зеленцов Д.Г. Анализ применимости аналитических формул при решении задач долговечности стержневых корродирующих конструкций / Д.Г. Зеленцов, О.А. Радуль, Л.И. Короткая. // Системні технології. [Регіональний міжвузівський збірник наукових праць].– 2007. – Вип. 3 (50). – С. 121 – 129.