

ТЕОРИЯ УСТОЙЧИВОСТИ УЕДИНЕННЫХ ВОЛН НА ЭЛАСТИКЕ ЭЙЛЕРА

А. Т. Ильичев

Математический ин-т им. В.А. Стеклова РАН, г. Москва

1 Введение

Тонкие стержни отождествляются со своей нейтральной кривой, называемой упругой линией, на которой не происходит ни растяжения ни сжатия при изгибе. Динамика упругой линии нерастяжимого бессдвигового стержня бесконечной длины при отсутствии кручения в рамках модели балки Бернулли-Эйлера описывается следующей системой уравнений (в безразмерной форме)

$$\begin{aligned} \tau_{tt}^i &= (p\tau^i)_{\xi\xi} + \tau_{\xi\xi}^i - \tau_{\xi\xi\xi\xi}^i, \\ \tau^i \tau_i &= 1, \\ \tau_1 &\rightarrow 1, \quad \tau_{2,3} \rightarrow 0, \quad \xi \rightarrow \pm\infty. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь ξ – безразмерная длина дуги вдоль упругой линии, τ_i , $i = 1, 2, 3$ – компоненты единичного вектора, касательного к упругой линии и $p = P - 1$, где P – абсолютное значение силы натяжения в стержне; по повторяющимся индексам предполагается суммирование, нижние индексы t и ξ означают дифференцирование по соответствующим переменным, жонглирование индексами происходит при помощи диагонального метрического тензора с единицами на диагонали.

Классификация различных форм упругих линий впервые была дана Эйлером, который вывел обыкновенное дифференциальное уравнение, описывающее форму тонких нерастяжимых стержней, находящихся под действием силы натяжения (см., например [10]). Упругая кривая стержня бесконечной длины может иметь форму петли, которая представляет собой бегущую уединенную волну и описывается солитонным решением уравнений (1.1) (Рис. 1):

$$\begin{aligned} p &= -p^0 = -6(1 - c^2) \operatorname{sech}^2 \sqrt{1 - c^2} \zeta, \quad \tau_3 = 0, \\ \tau_1 &= \tau_1^0 = 1 - 2 \operatorname{sech}^2 \sqrt{1 - c^2} \zeta, \\ \tau_2 &= \tau_2^0 = -2 \operatorname{sech}^2 \sqrt{1 - c^2} \zeta \operatorname{sh} \sqrt{1 - c^2} \zeta, \\ \zeta &= \xi - ct, \quad 0 \leq c < 1, \end{aligned} \quad (1.2)$$

где c – безразмерная скорость волны.

Система уравнений (1.1) записывается в гамильтоновом виде:

$$\tau_t^i = \frac{\partial \delta E}{\partial \xi \delta v_i}, \quad v_t^i = \frac{\partial \delta E}{\partial \xi \delta \tau_i}, \quad \tau^i \tau_i = 1, \quad (1.3)$$

где

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} [(v_i v^i + \tau_{i\xi} \tau_{\xi}^i + P(\tau_i \tau^i - 1))] d\xi.$$

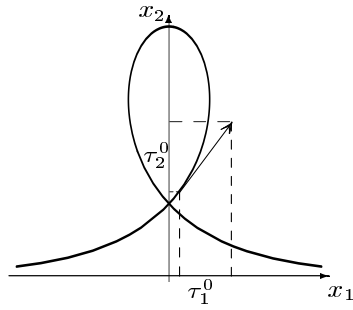


Рис. 1: Форма профиля уединенной волны на стержне и касательный вектор $\{\tau_1^0, \tau_2^0, 0\}^T$.

Наряду с гамильтонианом E имеют место еще две формально сохраняющиеся величины:

$$Q = \int_{-\infty}^{\infty} (\tau^i - \tau_{\infty}^i) v_i d\xi, \quad N = \int_{-\infty}^{\infty} (\tau^1 - 1) d\xi, \quad \tau_{\infty}^1 = 1, \quad \tau_{\infty}^{2,3} = 0.$$

Введем обозначения $\phi_c = \{\tau_1^0 - 1, \tau_2^0, 0, v_1^0, v_2^0, 0\}^T$ ($v_1^0 = -c(\tau_1^0 - 1)$, $v_2^0 = -c\tau_2^0$) и $\mathbf{w}(t) = \{\tau_1 - 1, \tau_2, \tau_3, v_1, v_2, v_3\}^T$ для вектор-функций, а также $X = H^1(\mathbb{R}) \times H^1(\mathbb{R}) \times H^1(\mathbb{R}) \times L^2(\mathbb{R}) \times L^2(\mathbb{R}) \times L^2(\mathbb{R})$ для гильбертова пространства с нормой $\|\cdot\|$. В настоящей статье приводится доказательство следующей теоремы о нелинейной орбитальной устойчивости петли Эйлера (1.2) по отношению к возмущениям только $\tau_{1,2}^0$:

Теорема 1. Пусть $\tau_3 \equiv 0$ и для каждого $\mathbf{w}_0 \in X$ вблизи ϕ_c в X , $\|\mathbf{w}_0 - \phi_c\| < \gamma$, существует $T = T(\gamma) > 0$ и вектор-функция $\mathbf{w}(t, \cdot) \in C([0, T], X)$ (непрерывная со значениями в X), $\mathbf{w}(0, \cdot) = \mathbf{w}_0 = \{\tau_0^l, 0, v_0^l, 0\}^T$, $l = 1, 2$, такая что для всех t , $0 \leq t \leq T$, $\tau_0^i \tau_{0i} = \tau^i \tau_i = 1$ и $H(\mathbf{w}) = H(\mathbf{w}_0)$, $Q(\mathbf{w}) = Q(\mathbf{w}_0)$, $R(\mathbf{w}) = R(\mathbf{w}_0)$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что если $\|\mathbf{w}_0 - \phi_c\| < \delta$, то

$$\sup_{t > 0} \inf_{\omega \in \mathbb{R}} \|\mathbf{w}(t, \cdot) - \phi_c(\cdot + \omega)\| < \varepsilon.$$

Доказательство этой теоремы основано на использовании того факта, что семейство сдвигов (орбита) уединенной волны доставляет локальный минимум сохраняющемуся функционалу Ляпунова

$$R(\mathbf{w}) = H(\mathbf{w}) + cQ(\mathbf{w}) - N(\mathbf{w})$$

на замкнутом подмногообразии $\tau_i \tau^i = 1$ пространства X . Этот факт, в свою очередь, следует из того что “линеаризованный гамильтониан”

$\mathcal{H}(\phi_c) = \delta^2 R(\phi_c)/\delta^2 \mathbf{w}$ имеет в точности одно нулевое собственное значение и его положительный спектр отделен от нуля.

При $\delta\tau_3 \equiv \tau \neq 0$, однако, оператор $\mathcal{H}(\phi_c)$ имеет дополнительное отрицательное собственное значение и достаточные условия устойчивости граничных состояний трансляционно-инвариантных гамильтоновых систем, в том виде в котором они сформулированы в статье [5], нарушаются.

В настоящей статье также доказывается линейная неустойчивость подсемейства уединенных волн по отношению к поперечным возмущениям $\delta\tau \neq 0$. Показано, что существует растущая со временем собственная функция, которая является решением уравнений (1.1), линеаризованных вокруг солитонного решения, описывающего уединенную волну, безразмерная скорость c которой не превосходит $1/\sqrt{2}$.

Линеаризованные уравнения (1.1) для $\delta\tau_{1,2}$ и τ разделяются, в связи с чем достаточно проанализировать поведение возмущений τ отдельно, так как результат об устойчивости по отношению к $\delta\tau_{1,2}$ известен. Результат о неустойчивости уединенных волн получен при помощи использования свойств функции Эванса.

Показано, что в некоторой окрестности начала координат для вещественных положительных λ выполняется неравенство $D(\lambda) < 0$. Более точно, выполняется следующая теорема:

Теорема 2. Функция Эванса $D(\lambda)$, построенная для собственной функции $w(\lambda, \zeta)$, является аналитической в некоторой окрестности нуля, и ее сходящийся ряд Тейлора в этой окрестности имеет вид:

$$D(\lambda) = \frac{1 - 2c^2}{4(1 - c^2)^3} \lambda^2 + \sum_{n=3}^{\infty} e_n(c) \lambda^n. \quad (1.4)$$

Отсюда следует, что для $c^2 < 1/2$ функция $D(\lambda)$ имеет нуль в некоторой точке $\lambda = \lambda_0$ на положительной вещественной полуоси, что, в свою очередь, означает существование неустойчивой собственной функции $w(\lambda_0, \zeta)$.

2 Формулировка задачи, солитонные решения, симметрии

Рассматривается тонкий нерастяжимый бессдвиговый упругий стержень бесконечной длины, находящийся под действием силы натяжения и в невозмущенном состоянии совпадающий с осью x_1 декартовой системы координат. Полная энергия стержня складывается из кинетической и изгибной энергии; вкладом энергии кручения пренебрегаем. Соответствующие линейные плотности кинетической K и потенциальной W энергий даются выражениями

$$K = \frac{1}{2} \rho S x_i^i x_{it}, \quad W = \frac{1}{2} I E_0 x_{\xi\xi}^i x_{i\xi\xi},$$

где x_i , $i = 1, 2, 3$ координаты точек нейтральной кривой (упругой линии) стержня, ρ – плотность, S – площадь поперечного сечения стержня, ρI – момент инерции поперечного сечения относительно прямой, ортогональной

главной плоскости изгиба, совпадающей с плоскостью x_1x_2 , E_0 – модуль Юнга, ξ – длина дуги упругой линии. Форма упругой линии задается уравнением $x^i = x^i(t, \xi)$.

Для тонких стержней вращательная часть кинетической энергии $K_r = \frac{1}{2}\rho S x_{t\xi}^i x_{it\xi}$ мала по сравнению с кинетической энергией K и изгибной энергией W , и ею можно пренебречь [2].

Уравнения движения получаются варьированием лагранжиана Λ :

$$\Lambda = \frac{1}{2} \int_{t_0}^t \int_{-\infty}^{\infty} (\rho S x_{it}^i x_{it} - I E x_{\xi\xi}^i x_{i\xi\xi}) d\xi dt$$

при условии нерастяжимости $x_{i\xi} x_{\xi}^i = 1$. Эти уравнения имеют вид:

$$\rho S x_{tt}^i = (P x_{i\xi})_{\xi} - I E x_{i\xi\xi\xi}, \quad x_{i\xi} x_{\xi}^i = 1, \quad (2.1)$$

где $P(t, \xi) = p(t, \xi) + p_{\infty}$ – множитель Лагранжа, соответствующий физической величине силы натяжения, $p \rightarrow 0$ при $\xi \rightarrow \pm\infty$. Производя в (2.1) масштабные преобразования

$$p \rightarrow p_{\infty} p, \quad \xi \rightarrow \sqrt{I E / p_{\infty}} \xi, \quad t \rightarrow \sqrt{\rho S I E / p_{\infty}^2} t,$$

и сохраняя старые обозначения, получим (1.1), где $\tau_i = x_{\xi}^i$. Как уже отмечалось, уравнения имеют гамильтонову форму, функционал E , а также Q и N непрерывны как функционалы из гильбертова пространства X в \mathbb{R} (последний в силу того обстоятельства, что $\tau_1 - 1 \in L^1(\mathbb{R})$, что следует из условия нерастяжимости в (1.1)).

2.1 Солитонные решения

Солитонные решения (1.1) представляют из себя решения типа бегущей волны, убывающие на бесконечности. Бегущие волны зависят от автомодельной комбинации $\zeta = \xi - ct$ и описывающие их уравнения получаются интегрированием (1.1). Эти уравнения записываются в виде:

$$\begin{aligned} -c(\tau^i - \tau_{\infty}^i) &= v^i, \\ -c v^i &= p \tau^i - \tau_{\infty}^i - \tau_{\zeta}^i, \quad \tau^i \tau_i = 1. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Умножив второе уравнение в (2.2) на τ_i и просуммировав по индексу i , получим $p = c^2 + (1 - c^2) \tau_{\infty}^i \tau_i - \tau_{\zeta}^i \tau_{i\zeta}$.

Далее, умножим это же уравнение на τ_{ζ}^i и просуммируем. В результате получим $-\frac{1}{2} \tau_{\zeta}^i \tau_{i\zeta} - s^2 \tau_{\infty}^i \tau_{i\zeta} = 0$, $s = \sqrt{1 - c^2}$, и после однократного интегрирования имеем:

$$-\frac{1}{2} \tau_{\zeta}^i \tau_{i\zeta} - s^2 \tau_{\infty}^i \tau_i = \Pi. \quad (2.3)$$

Для того, чтобы получить солитонное решение, положим $\Pi = -s^2$. Определим новую угловую переменную θ при помощи выражений

$\tau_1 = \cos \theta$, $\tau_2 = \sin \theta$. В новых переменных уравнение (2.3) записывается в виде уравнения $\theta_\zeta^2 = 4s^2 \sin^2 \theta/2$, которое легко интегрируется, и его решения приводятся к виду (1.2). Заметим, что система уравнений (2.2) для солитонных решений может быть также записана в виде

$$R'(\phi_c) = \{E(\phi_c) + cQ(\phi_c) - N(\phi_c)\}' = 0, \quad (2.4)$$

где штрих здесь и далее обозначает вариационную производную. Вид функционала Ляпунова $R(\mathbf{w})$ несколько отличается от рассмотренного в разделе 1, однако, как мы убедимся, это отличие не влияет на ход дальнейших рассуждений.

2.2 Корректность задачи Коши

Под решением задачи Коши уравнений (1.1) будем понимать решение в слабой форме, а именно: задачу Коши для уравнений (1.1) будем называть корректно поставленной, если для любого $\mathbf{w}_0 \in X$ вблизи ϕ_c в X ($\|\mathbf{w}_0 - \phi_c\| < \gamma$) существуют $T = T(\gamma) > 0$ и вектор-функция $\mathbf{w}(t, \cdot) \in C([0, T], X)$ (непрерывная со значениями в X), $\mathbf{w}(0) = \mathbf{w}_0 = \{\tau_0^i, v_0^i\}^T$, $i = 1, 2, 3$, такая что для всех t , $0 \leq t \leq T$, $\tau_0^i \tau_{0i} = \tau^i \tau_i = 1$ и $E(\mathbf{w}) = E(\mathbf{w}_0)$, $Q(\mathbf{w}) = Q(\mathbf{w}_0)$, $N(\mathbf{w}) = N(\mathbf{w}_0)$.

2.3 Симметрии

Функционалы E , Q и N являются инвариантными под действиями групп Ли

- сдвиги $T : X \rightarrow X$:

$$T(\omega)\mathbf{w}(\cdot, \xi) = \mathbf{w}(\cdot, \xi + \omega) \exp(\omega \partial_\xi) \mathbf{w}(\cdot, \xi), \quad \omega \in \mathbb{R};$$

- вращения G вокруг оси x_1 : $G : X \rightarrow X$:

$$G(\varphi)\mathbf{w}(\cdot, \cdot) \exp(\mathcal{A}\varphi) \mathbf{w}(\cdot, \cdot), \quad \varphi \in \mathbb{S}^1 = [0, 2\pi)$$

$$\mathcal{A} = \text{diag}(\mathcal{C}, \mathcal{C}), \quad \mathcal{C} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Вектор $\mathbf{k}_1 = \partial_\zeta \phi_c$ представляет собой собственный вектор оператора \mathcal{H} , отвечающий нулевому собственному числу. Аналогично, из вращательной инвариантности функционалов E и Q следует, что вектор-функция $\mathbf{k}_2 = \{0, 0, \tau_2^0, 0, 0, v_2^0\}^T$ является собственным вектором оператора \mathcal{H} , отвечающим нулевому собственному значению.

Определим далее окрестность \hat{U}_ϵ орбиты $G(\varphi)T(\omega)\phi_c|_{\varphi \in \mathbb{S}^1, \omega \in \mathbb{R}}$ следующим образом

$$\hat{U}_\epsilon = \{\mathbf{w} \in X; \inf_{\varphi \in \mathbb{S}^1} \inf_{\omega \in \mathbb{R}} \|\mathbf{w} - G(\varphi)T(\omega)\phi_c\| < \epsilon\}.$$

Обозначим $\langle \cdot, \cdot \rangle$ интеграл от скалярного произведения двух векторов в \mathbb{R}^6 .

В силу вращательной инвариантности системы существует $\epsilon > 0$ и гладкие отображения $\omega : \hat{U}_\epsilon \rightarrow \mathbb{R}$ и $\varphi : \hat{U}_\epsilon \rightarrow \mathbb{S}^1$ такие, что для всех $\mathbf{w} \in \hat{U}_\epsilon$

$$\langle G(\varphi(\mathbf{w}))T(\omega(\mathbf{w}))\mathbf{w}, \mathbf{k}_{1,2} \rangle = 0.$$

3 Спектральные свойства оператора \mathcal{H}

3.1 Возмущения в плоскости петли

В этом разделе будем полагать третьи компоненты τ_3 и $\delta\tau_3$ касательного вектора и возмущения касательного вектора, соответственно, равными нулю. То же самое будем предполагать для компонент скорости и ее возмущений. Введем следующие обозначения: $\mathbf{u} = \{u_1, u_2, 0, u_4, u_5, 0\}^T$ – вектор-функция, $\hat{L} = \{\mathbf{u} \in X, \tau_1^0 u_1 + \tau_2^0 u_2 = 0\}$ – линейное замкнутое подпространство X , касательное к подмногообразию $\hat{M} = \{\mathbf{u} \in X, \tau_i \tau^i = 1\}$ в точке $\mathbf{u} = \phi_c$.

Имеет место неравенство $\langle \mathcal{H}\mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle \geq 0$ при $\mathbf{u} \in \hat{L}$. В самом деле, разрешая равенство $\tau_i^0 \delta\tau^i = 0$, получим для возмущений:

$$\delta\tau_1 = \tau_2^0 \delta\vartheta, \quad \delta\tau_2 = -\tau_1^0 \delta\vartheta.$$

Рассмотрим далее билинейную форму $\langle \mathcal{H}\delta\mathbf{w}, \delta\mathbf{w} \rangle$ на подпространстве \hat{L} :

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{H}\delta\mathbf{w}, \delta\mathbf{w} \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\delta\tau^i \left(-\frac{d^2}{d\xi^2} + 1 - p^0 \right) \delta\tau_i + \delta v^i \delta v_i + 2c\delta v^i \delta\tau_i \right] d\xi = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\delta\vartheta \left(-\frac{d^2}{d\xi^2} + c^2 + s^2 - 2s^2 \operatorname{ch}^{-2} s\xi \right) \delta\vartheta + 2c\tau_2^0 \delta\vartheta \delta v_1 - \right. \\ &\quad \left. - 2c\tau_1^0 \delta\vartheta \delta v_2 + \delta v^i \delta v_i \right] d\xi. \end{aligned}$$

Задача на собственные значения для оператора \mathcal{H} формулируется следующим образом:

$$\mathcal{R}_2 \chi = \nu \chi, \quad (3.1)$$

где

$$\mathcal{R}_2 = \begin{pmatrix} \mathcal{H}_1 + c^2 & c\tau_2^0 & -c\tau_1^0 \\ c\tau_2^0 & 1 & 0 \\ -c\tau_1^0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\chi = \{\chi_1, \chi_2, \chi_3\}^T, \quad \mathcal{H}_1 = -\frac{d^2}{d\xi^2} + s^2 - 2\operatorname{sech}^2 s\xi.$$

Задача на собственные значения (3.1) переписывается в компонентах:

$$\chi_2 = \frac{c\tau_2^0}{\nu - 1} \chi_1, \quad \chi_3 = -\frac{c\tau_1^0}{\nu - 1}, \quad \mathcal{H}_1 \chi_1 = \left(\nu - \frac{c^2 \nu}{\nu - 1} \right) \chi_1$$

и, таким образом, сводится к задаче Штурма-Лиувилля на собственные значения для компоненты χ_1 . Из теории оператора Штурма-Лиувилля известно,

что оператор \mathcal{H}_1 имеет в точности одно нулевое собственное значение (с собственной функцией $\partial_\xi \tau_1^0 / \tau_2^0$, отвечающей $\partial_\xi \phi_c$), а остальной его спектр положителен и отделен от нуля. Из выражения для нулевого собственного значения $\nu - \frac{c^2 \nu}{\nu-1} = 0$ имеем $\nu_0 = 0$, $\nu_+ = 1 + c^2 > 0$. Непрерывный спектр \mathcal{H} удовлетворяет условию $\nu - \frac{c^2 \nu}{\nu-1} > s^2$, откуда следует $\nu > 1 - c$ и, следовательно, спектр отделен от нуля для фиксированной скорости $c \in [0, 1)$.

Отсюда сразу следует, что если $\mathbf{u} \in \hat{L}$ и $\langle \mathbf{u}, \partial_\xi \phi_c \rangle = 0$, то

$$\langle \mathcal{H}\mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle \geq \alpha_0 \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle. \quad (3.2)$$

Кроме того, если $\mathbf{u} \in \hat{L}$ и $\langle \mathbf{u}, \partial_\xi \phi_c \rangle = 0$, то

$$\langle \mathcal{H}\mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle \geq \alpha_1 \|\mathbf{u}\|^2. \quad (3.3)$$

В самом деле, домножив обе части неравенства (3.2) на $1 - \varepsilon$, где ε – достаточно малая постоянная, получим

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{H}\mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle &\geq \varepsilon \int_{-\infty}^{\infty} [(\partial_\xi u_1)^2 + (\partial_\xi u_2)^2 + P^0(u_1^2 + u_2^2) + u_4^2 + u_5^2 + \\ &\quad + 2c(u_1 u_4 + u_2 u_5)] d\xi + (1 - \varepsilon)\alpha_0 \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle \geq \\ &\geq \int_{-\infty}^{\infty} [\beta_1(u_1^2 + u_2^2) + \beta_2(u_4^2 + u_5^2) + \varepsilon(\partial_\xi u_1^2 + \partial_\xi u_2^2)] d\xi, \quad P^0 = -p^0 + 1, \end{aligned}$$

где $\beta_1 = (1 - \varepsilon)\alpha_0 + \varepsilon(1 - 6s^2 - c)$ и $\beta_2 = (1 - \varepsilon)\alpha_0 - \varepsilon c$. Для того чтобы получить оценку (3.3) выберем $\alpha_1 = \min(\beta_1, \beta_2, \varepsilon)$.

3.2 Поперечные возмущения

Определим вектор-функцию $\hat{\mathbf{u}} = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6\}^T \in X$ и линейное замкнутое подпространство $\tilde{L} = \{\hat{\mathbf{u}} \in X, \tau_1^0 u_1 + \tau_2^0 u_2 = 0\}$, $\tilde{L} \in X$, касательное к подмногообразию $\tilde{M} = \{\hat{\mathbf{u}} \in X, \tau_i \tau^i = 1\}$ в точке $\hat{\mathbf{u}} = \phi_c$.

При $\delta\tau_3 \neq 0$ оператор $\mathcal{H}|_{\tilde{L}}$ имеет одно простое отрицательное собственное значение, нулевое собственное значение кратности два и положительный спектр, отделенный от нуля. Решение уравнения $\tau_i^0 \delta\tau^i = 0$ теперь дается выражениями $\delta\tau_1 = \tau_2^0 \delta\vartheta$, $\delta\tau_2 = -\tau_1^0 \delta\vartheta$, $\delta\tau_3 = \delta\psi$. Рассмотрим билинейную форму $\langle \mathcal{H}\delta\mathbf{w}, \delta\mathbf{w} \rangle$ на \tilde{L} :

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{H}\delta\mathbf{w}, \delta\mathbf{w} \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\delta\tau^i \left(-\frac{d^2}{d\xi^2} + 1 - p^0 \right) \delta\tau_i + \delta v^i \delta v_i + 2c\delta v^i \delta\tau_i \right] d\xi = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\delta\vartheta \left(-\frac{d^2}{d\xi^2} + c^2 + s^2 - 2s^2 \text{ch}^{-2} s\xi \right) \delta\vartheta + 2c\tau_2^0 \delta\vartheta \delta v_1 - 2c\tau_1^0 \delta\vartheta \delta v_2 + \right. \\ &\quad \left. + 2c\delta\psi \delta v_3 + \delta\psi \left(-\frac{d^2}{d\xi^2} + c^2 + s^2 - 6s^2 \text{ch}^{-2} s\xi \right) \delta\psi + \delta v^i \delta v_i \right] d\xi, \end{aligned}$$

где $i = 1, 2, 3$.

Задача на собственные значения для оператора \mathcal{H} , таким образом, формулируется следующим образом:

$$\mathcal{R}_3 \hat{\chi} = \nu \hat{\chi}, \quad (3.4)$$

где

$$\mathcal{R}_3 = \begin{pmatrix} \mathcal{H}_1 + c^2 & 0 & c\tau_2^0 & -c\tau_1^0 & 0 \\ 0 & \mathcal{H}_2 + c^2 & 0 & 0 & c \\ c\tau_2^0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -c\tau_1^0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \hat{\chi} = \{\chi_1, \chi_2, \chi_3, \chi_4, \chi_5\}^T$$

и

$$\mathcal{H}_2 = -\frac{d^2}{d\xi^2} + s^2 - 6\operatorname{sech}^2 s\xi.$$

Задача на собственные значения (3.4) распадается на две независимые:

$$\mathcal{H}_1 \chi_1 = \left(\nu - \frac{c^2 \nu}{\nu - 1} \right) \chi_1, \quad \mathcal{H}_2 \chi_2 = \left(\nu - \frac{c^2 \nu}{\nu - 1} \right) \chi_2. \quad (3.5)$$

Первое уравнение в (3.5) полностью аналогично соответствующему уравнению из предыдущего параграфа. Из общей теории оператора Штурма-Лиувилля следует, что оператор \mathcal{H}_2 имеет одно отрицательное собственное значение равное $-3s^2$, нулевое собственное значение (с собственной функцией $\chi_2 = \tau_2^0$, отвечающей собственному вектору \mathbf{k}_2) и положительный спектр, отделенный от нуля. Уравнение $\left(\nu - \frac{c^2 \nu}{\nu - 1} \right) = -3s^2$ имеет в точности один отрицательный корень.

4 Устойчивость

4.1 Возмущения в плоскости петли. Орбита $T(\omega)\phi_c$

Пусть $\mathbf{w}(t, \cdot)$ решение задачи Коши (1.1) на некотором полуинтервале $[0, T)$. Тогда устойчивой считается орбита, как это описано во введении.

Рассматриваемая орбита уединенной волны является устойчивой относительно возмущений касательного вектора не выводящих из плоскости петли, если

- задача Коши для (1.1) корректно поставлена (в смысле определения 1);
- $R(\mathbf{w}) - R(\phi_c) \geq \alpha \|T(\omega(\mathbf{w}))\mathbf{w} - \phi_c\|^2$ для $\mathbf{w} \in U_\epsilon \cap M$, (α - постоянная, $\omega(\mathbf{w})$ из леммы 2).

Если выполняются эти условия, то рассматриваемая уединенная волна устойчива.

Для $\mathbf{w} \in U_\epsilon \cap M$ имеет место неравенство

$$R(\mathbf{w}) - R(\phi_c) \geq \alpha \|T(\omega(\mathbf{w}))\mathbf{w} - \phi_c\|^2.$$

В силу специфики функционала Ляпунова $R(\mathbf{w})$ доказательства последнего утверждения немного отличается от соответствующего доказательства, приведенного в статье [5], поэтому рассмотрим его здесь подробно.

Пусть $\mathbf{w} \in U_\epsilon \cap \hat{M}$. Произведем разложение $\rho = T(\omega(\mathbf{w}))\mathbf{w} - \phi_c = \mathbf{u}^0 + \mathbf{u}$, где $\rho = \{\rho_1, \rho_2, 0, \rho_4, \rho_5, 0\}^T$, $\mathbf{u}_0 = \{u_1^0, u_2^0, 0, 0, 0\}^T$ и $\mathbf{u} \in L$. Далее заметим, что

$$2(\tau_1^0 \rho_1 + \tau_2^0 \rho_2) = -a, \quad (4.1)$$

где $a = \rho_1^2 + \rho_2^2$. Равенство (4.1) следует из включения $T(\omega(\mathbf{w}))\mathbf{w} \in \hat{M}$. Из (4.1) следует $\tau_1^0 u_1^0 + \tau_2^0 u_2^0 = -a/2$. Разрешая последнее уравнение относительно u_1^0 и u_2^0 получим

$$u_1^0 = -\frac{a}{2}\tau_1^0, \quad u_2^0 = -\frac{a}{2}\tau_2^0. \quad (4.2)$$

При $\mathbf{w} \in U_\epsilon \cap \hat{M}$ в силу (2.4) имеем $R(\mathbf{w}) - R(\phi_c) = \frac{1}{2} \langle \mathcal{H}\rho, \rho \rangle + o(\|\rho\|^2)$. Далее заметим, что $\langle \mathbf{u}, \partial_\xi \phi_c \rangle = \langle T(\omega(\mathbf{w})) - \phi_c - \mathbf{u}^0, \partial_\xi \phi_c \rangle = 0$, как следствие равенств $\langle \phi_c, \partial_\xi \phi_c \rangle = 0$, $\langle \mathbf{u}^0, \partial_\xi \phi_c \rangle = 0$. Последнее равенство вытекает из (4.2). Следовательно, \mathbf{u} принадлежит положительному подпространству \mathcal{H} и $\langle \mathcal{H}\mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle \geq \alpha_1 \|\mathbf{u}\|^2$. Окончательно,

$$\|\mathbf{u}\| = \|\rho - \mathbf{u}^0\| \geq \|\rho\| - \|\mathbf{u}^0\| = \|\rho\| - O(\|\rho\|^2),$$

и для достаточно малых ρ

$$R(\mathbf{w}) - R(\phi_c) \geq \frac{\alpha_1}{2} \|\rho\|^2 = \alpha \|\rho\|^2.$$

4.2 Орбита $G(\varphi)T(\omega)\phi_c$

При ненулевой третьей компоненте касательного вектора к упругой линии в системе появляется дополнительная симметрия $\mathcal{G}(\varphi)$, $\varphi \in \mathbb{S}^1$.

По аналогии орбита $G(\varphi)T(\omega)\phi_c$ уединенной волны ϕ_c называется устойчивой, если для любого $\epsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что если $\|\mathbf{w}(0, \cdot) - \phi_c\| < \delta$, то $\sup_{t>0} \inf_{\varphi \in \mathbb{S}^1} \inf_{\omega \in \mathbb{R}} \|\mathbf{w}(t, \cdot) - G(\varphi)T(\omega)\phi_c\| < \epsilon$.

В случае присутствия поперечных возмущений касательного вектора, выходящих из плоскости петли, оператор \mathcal{H} имеет одно отрицательное направление на \tilde{L} , вследствие чего форма $\langle \mathcal{H}\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{u}} \rangle$ на \tilde{L} не является знакоопределенной. Из общей теории трансляционно инвариантных гамильтоновых систем (теорема 3 в [5]) следует, что если \mathcal{H} имеет одно простое отрицательное и простое нулевое собственные значения и положительный спектр, отделенный от нуля, то орбита сдвигов уединенной волны устойчива, если величина производной по скорости от функционала, который сохраняется в силу трансляционной инвариантности, положительна. В случае дополнительной симметрии кратность нулевого собственного значения должна быть

равна числу симметрий рассматриваемых уравнений. Так, в настоящем случае, оператор $\mathcal{H}|_{\tilde{L}}$ имеет двукратное нулевое собственное значение, которое не влияет на устойчивость орбиты. Тем не менее,

$$\frac{dQ(\phi_c)}{dc} = -\frac{8}{s^3} < 0, \quad (4.3)$$

что делает невозможным применение вышеупомянутой теории, и вопрос об устойчивости стержня относительно поперечных возмущений остается открытым. Для исследования этого вопроса будем рассматривать поведение линейных поперечных возмущений солитонного решения (1.2).

Линеаризуя уравнения (1.1) в окрестности солитонного решения (1.2), получим уравнение

$$\tau_{tt} = -(p^0 \tau)_{xx} + \tau_{xx} - \tau_{xxxx} \quad (4.4)$$

для возмущения $\delta\tau_3 = \tau$ третьей компоненты касательного вектора, где p^0 дается формулой (1.2), а производные берутся по $\zeta = x - ct$.

5 Вычисление первого ненулевого коэффициента ряда Тейлора функции $D(\lambda)$

Будем искать решение уравнения (4.4) в форме

$$\tau = \tau(x, t) = e^{\lambda t} w(\lambda, \zeta), \quad \zeta = x - ct, \quad c \leq 0 < 1, \quad (5.1)$$

где w убывает экспоненциально при $\xi \rightarrow \pm\infty$ и $\text{Re } \lambda > 0$. Функция $w(\lambda, \zeta)$ удовлетворяет линейной обобщенной спектральной задаче

$$\left(\lambda - c \frac{d}{d\zeta}\right)^2 w = \frac{d^2}{d\zeta^2} w - \frac{d^4}{d\zeta^4} w - \frac{d^2}{d\zeta^2} (p^0 w). \quad (5.2)$$

Последнее уравнение, в свою очередь, записывается в матричном виде

$$\mathbf{y}' = \mathcal{M}(\lambda, \zeta) \mathbf{y}, \quad (5.3)$$

$$\mathbf{y} = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}^T, \quad y_1 = w, \quad y_2 = w', \quad y_3 = w'', \quad y_4 = w''',$$

где штрихи обозначают производные по ζ и

$$\mathcal{M}(\lambda, \zeta) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\lambda^2 - p^{0''} & 2\lambda c - 2p^{0'} & 1 - c^2 - p^0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.4)$$

Сопряженное уравнение записывается в виде

$$\left(\lambda + c \frac{d}{d\zeta}\right)^2 w^* = \frac{d^2}{d\zeta^2} w^* - \frac{d^4}{d\zeta^4} w^* - p^0 \frac{d^2}{d\zeta^2} w^*, \quad (5.5)$$

или в матричной форме

$$\mathbf{z}' = -\mathbf{z}\mathcal{M}(\lambda, \zeta), \quad (5.6)$$

$$\mathbf{z} = \{z_1, z_2, z_3, z_4\}, \quad z_4 = w^*, \quad z_3 = -w^{*'}, \quad z_2 = w^{*''} - (1 - c^2 - p^0)w^*, \\ z_1 = -w^{*''''} + (1 - c^2 - p^0)w^{*'} - (2\lambda c - p^{0'})w^*.$$

Так как $y(\lambda, \zeta)$, $z(\lambda, \zeta)$ удовлетворяют (5.3), (5.6), то

$$\partial_\zeta(z(\lambda, \zeta) \cdot y(\lambda, \zeta)) = 0, \quad (5.7)$$

где “ \cdot ” обозначает скалярное произведение двух векторов.

При $\lambda = 0$ полный базис решений уравнений (5.2) и (5.5), определяется в явном виде. Полагая $\lambda = 0$ в (5.2) и дважды интегрируя его, получим

$$\mathcal{L}_0 w = \frac{d^2 w}{d\zeta^2} - (1 - c^2)w + p^0 w = a + b\zeta. \quad (5.8)$$

Решение уравнения (5.2), таким образом, сводится к решению уравнения второго порядка (5.8) с произвольными постоянными a и b . При $a = b = 0$ частные решения имеют вид:

$$w_1 = \tau_2^0, \quad w_2 = w_1 \int w_1^{-2} d\zeta.$$

Для некоторого $a \neq 0$, $b = 0$ решение (5.8) имеет вид:

$$w_3 = -w_1 \int w_2 d\zeta + w_2 \int w_1 d\zeta.$$

При $a = 0$ и некотором $b \neq 0$ решением (5.8) является

$$w_4 = -w_1 \int \zeta w_2 d\zeta + w_2 \int \zeta w_1 d\zeta.$$

Линейно независимые решения w_1, w_2, w_3, w_4 составляют базис в пространстве решений уравнения (5.2). Соответствующей нормировкой w_1 и w_3 можно получить Y_{10} и Y_{30} такие, что $Y_{10} \rightarrow e^{-s\zeta}$ и $Y_{30} \rightarrow 1$ при $\zeta \rightarrow \infty$:

$$Y_{10} = \frac{e^{s\zeta} - e^{-s\zeta}}{(e^{s\zeta} + e^{-s\zeta})^2}, \quad Y_{30} = \frac{1 - 6e^{2s\zeta} + e^{4s\zeta}}{(1 + e^{2s\zeta})^2},$$

Нормируя w_2 , получим решение Y_{20} , имеющее асимптотику $Y_{20} \rightarrow e^{s\zeta}$ при $\zeta \rightarrow \infty$. Линейная комбинация w_4, Y_{30} и Y_{20} дает решение Y_{40} , асимптотическое ζ при $\zeta \rightarrow \infty$.

Следуя [1], обозначим $w^{*''} = \phi$. Тогда $\phi = w_1$ и $\phi = w_2$ являются двумя линейно независимыми решениями (5.8) с $a = b = 0$. Следовательно,

$$w_1^* = \int \left(\int \tau_2^0 d\zeta \right) d\zeta, \quad w_2^* = \int \left(\int w_2 d\zeta \right) d\zeta$$

удовлетворяют (5.5) при $\lambda = 0$.

Нормируя w_1^* , получим $Z_{10} = \arctg(e^{s\zeta})$, $Z_{10} \rightarrow e^{s\zeta}$ при $\zeta \rightarrow \infty$.

Решение Z_{20} , асимптотическое $e^{-s\zeta}$ при $\zeta \rightarrow \infty$, получается нормировкой w_2^* . Решения $Z_{30} = 1$ и $Z_{40} = \zeta$ дополняют Z_{10} и Z_{40} до базиса.

Степени уравнений (5.2), (5.5) при λ имеют вид $\mathcal{L}Y = W$, где

$$\mathcal{L}Y = \frac{d^4 Y}{d\zeta^4} - (1 - c^2) \frac{d^2 Y}{d\zeta^2} + \frac{d^2}{d\zeta^2} (p^0 Y), \quad \mathcal{L}^* Z = \frac{d^4 Z}{d\zeta^4} - (1 - c^2) \frac{d^2 Z}{d\zeta^2} + p^0 \frac{d^2 Z}{d\zeta^2}.$$

Интегрируя последнее уравнение дважды, получим:

$$\mathcal{L}Y = \hat{W}, \quad \hat{W} = \int \left(\int W d\zeta \right) d\zeta. \quad (5.9)$$

Частное решение (5.9) имеет вид:

$$Y = -Y_{10} \int \hat{W} Y_{20} d\zeta + Y_{20} \int \hat{W} Y_{10} d\zeta. \quad (5.10)$$

Для вычисления явных формул для решений вида (5.10) был использован символьческий пакет *Mathematica 4.0*. Для того, чтобы получить необходимую асимптотику (см. [1]), модифицируем решения в форме (5.10) путем прибавления линейной комбинации решений $Y_{\alpha 0}$ однородного уравнения (5.2) для $\lambda = 0$. Например,

$$Y_{11} = \frac{ce^{s\zeta}(e^{2s\zeta}s\zeta - s\zeta - 2)}{s^3(1 + e^{2s\zeta})^2}, \quad Y_{11} \rightarrow \frac{c}{1 - c^2} \zeta e^{-s\zeta}, \quad \zeta \rightarrow \infty.$$

Для того, чтобы получить Y_{11} , к решению в форме (5.10) прибавляется γY_{10} , где постоянная γ определяется асимптотикой Y_{11} (см. [9]).

Степени уравнения (5.2) при $\lambda = 1$ имеют вид $\mathcal{L}^* Z = \hat{W}$. Полагая $\phi = d^2 Z / d\zeta^2$, получим уравнения вида (5.9) для функции ϕ . Используя формулу (5.10) для вычисления частного решения, возвратимся к Z , проинтегрировав ϕ дважды. И опять, для того, чтобы получить необходимую асимптотику модифицируем решения, добавляя линейную комбинацию решений $Z_{\alpha 0}$ однородного уравнения. Например,

$$Z_{11} = -\frac{c \arctg(e^{s\zeta})}{s^3} - \frac{c\zeta \arctg(e^{s\zeta})}{s^2} + \frac{ic \operatorname{PolyLog}[2, -ie^{s\zeta}]}{2s^3} - \frac{ic \operatorname{PolyLog}[2, ie^{s\zeta}]}{2s^3},$$

$$Z_{31} = \frac{\zeta}{1 - c}, \quad Z_{32} = \frac{s^2(1 + c)\zeta^2 - 4(1 + c) \ln(1 + e^{2s\zeta})}{s^4(1 - c)},$$

$$Z_{11} \rightarrow -\frac{c}{1 - c^2} \zeta e^{s\zeta}, \quad Z_{32} \rightarrow \frac{\zeta^2}{(1 - c)^2}, \quad \zeta \rightarrow -\infty,$$

где $\text{PolyLog}[2, y] = \int_y^0 t^{-1} \ln(1-t) dt$, так что

$$\begin{aligned} i \text{PolyLog}[2, -ie^{s\zeta}] - i \text{PolyLog}[2, ie^{s\zeta}] &\rightarrow 2e^{s\zeta}, \quad \zeta \rightarrow -\infty, \\ i \text{PolyLog}[2, -ie^{s\zeta}] - i \text{PolyLog}[2, ie^{s\zeta}] &\rightarrow \pi s\zeta + 2e^{-s\zeta}, \quad \zeta \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Для того, чтобы получить Z_{11} и Z_{32} , изменим решения, полученные с помощью (5.10) и дальнейшего интегрирования, путем добавления к ним $\gamma_1 Z_{10}$ и $\gamma_2 Z_{40}$ соответственно; постоянные $\gamma_{1,2}$ определяются из (5.5).

Выражения для решений при других степенях λ уравнений (5.2), (5.5) являются весьма громоздкими, их вид приведен в статье [9].

Коэффициенты при степенях λ в разложении вектор-функций $\mathbf{u}_{1,3}(\lambda, \zeta)$, $\mathbf{z}_{1,3}(\lambda, \zeta)$ единственным образом определяются соответствующими функциями Y_{ik} , Z_{ik} , $i = 1, 3$, $k = 0, 1, 2$ (см. выражения внизу (5.3) и (5.6)).

Для получения коэффициентов разложения функции $\hat{D}(\lambda)$, $\lambda \in \Lambda_\varepsilon$ (ε окрестности нуля) имеем (см. [8])

$$\hat{D}(\lambda) = \det \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11}\lambda + d_{11}\lambda^2 + O(\lambda^3) & a_{12} + b_{12}\lambda + d_{12}\lambda^2 + O(\lambda^3) \\ a_{21} + b_{21}\lambda + d_{21}\lambda^2 + O(\lambda^3) & a_{22} + b_{22}\lambda + d_{22}\lambda^2 + O(\lambda^3) \end{pmatrix},$$

где

$$\begin{aligned} a_{mn} &= 0, \quad m, n = 1, 2, \quad b_{11} = b_{21} = d_{21} = 0, \quad b_{12} = \frac{\pi s^2}{2(1+c)}, \quad b_{22} = 2, \\ d_{11} &= \frac{1-2c^2}{2s^3}, \quad d_{12} = -\pi \frac{2+3c}{2(1+c)s}, \quad d_{22} = -\frac{4(1+c)}{(1-c)s}. \end{aligned}$$

В силу того обстоятельства, что $a_{mn} = 0$, первым ненулевым коэффициентом разложения $\hat{D}(\lambda)$ является коэффициент при третьей степени λ и, более того, этот коэффициент полностью определяется коэффициентами при первой и второй степенях λ в разложении элементов определителя. Окончательно имеем

$$\hat{D}(\lambda) = \frac{1-2c^2}{s^3} \lambda^3 + O(\lambda^4), \quad \lambda \in \Lambda_\varepsilon.$$

Нормированная функция Эванса $D(\lambda)$, $D(\lambda) \rightarrow 1$ при $|\lambda| \rightarrow \infty$, имеет вид $D(\lambda) = \frac{\hat{D}(\lambda)}{\mathbf{I}^\wedge(\lambda) \cdot \mathbf{r}^\wedge(\lambda)}$.

При $\lambda \in \Lambda_\varepsilon$ имеем $\mathbf{I}^\wedge \cdot \mathbf{r}^\wedge = -4(1-c^2)^{3/2} \lambda + O(\lambda^2)$.

Вычисление коэффициентов разложения нормированной функции Эванса $D(\lambda)$ может быть проведено при помощи интегральной формулы [11, Theorem 1.11], которая в рассматриваемом случае имеет вид:

$$\frac{dD(\lambda)}{d\lambda} = -\frac{1}{\mathbf{I}^\wedge \cdot \mathbf{r}^\wedge} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{z}^\wedge(\lambda, \zeta) \cdot \dot{\mathcal{M}}^\wedge(\lambda, \zeta) \cdot \mathbf{y}^\wedge(\lambda, \zeta) d\zeta, \quad (5.11)$$

обозначения см., например, в [8].

Непосредственное вычисление дает

$$\frac{dD(\lambda)}{d\lambda} = -2 \frac{1 - 2c^2}{4s^6} \lambda + O(\lambda^2), \quad \lambda \in \Lambda_\varepsilon,$$

что также приводит к (1.4). Выражение для коэффициента при λ^2 подинтегрального выражения в (5.11) представлено в статье [9].

6 Заключение

В этой работе установлена устойчивость уединенных волн, возникающих в нерастяжимых стержнях при изгибе относительно возмущений формы, не выводящих из плоскости, содержащей профиль упругой линии. В силу того обстоятельства, что малое возмущение уединенной волны может привести к возникновению уединенной волны, распространяющейся со скоростью, отличной от скорости исходной уединенной волны, динамическая устойчивость эквивалентна устойчивости орбиты уединенной волны, порождаемой группой сдвигов. Рассматриваемый здесь случай обобщен в работе [4] на случай, когда учитывается энергия вращения, которая является малой по сравнению с полной энергией стержня, и получен аналогичный результат об устойчивости докритических уединенных волн.

Поперечные возмущения касательного вектора, выводящие из главной плоскости изгиба, приводят к линейной неустойчивости уединенной волны. Для $c^2 < 1/2$ ведущий коэффициент тейлоровского разложения нормированной функции Эванса $D(\lambda)$ в окрестности нуля является отрицательным и, следовательно, $D(\lambda)$ должна быть равна нулю на положительной вещественной полуоси. Существует неустойчивое собственное значение и отвечающая ему собственная функция. Это, в свою очередь, влечет за собой экспоненциальную неустойчивость уединенной волны в упомянутом диапазоне скоростей.

Во всех известных нам случаях, когда рассматриваемые уравнения имеют гамильтонову структуру и инвариантный “момент”, связанный с трансляционной инвариантностью задачи, существует связь между выпуклостью момента и знаком ведущего коэффициента тейлоровского разложения функции Эванса (см. [1, 3, 11]). В этих случаях существование неустойчивой собственной функции вызвано трансляционной симметрией. В рассматриваемом в настоящей главе случае, моментом, соответствующим трансляционной инвариантности $T(\omega)\mathbf{w}(\zeta) = \exp(\omega\partial_\zeta)\mathbf{w}(\zeta) = \mathbf{w}(\zeta + \omega)$, $\omega \in \mathbb{R}$, является $Q = Q(\mathbf{w})$. Имеем

$$\frac{dQ(\phi_c)}{dc} = -\frac{8}{s^3} < 0,$$

т. е. момент вогнут для всех $c \in [0, 1)$. Тем не менее, ведущий коэффициент разложения $D(\lambda)$ меняет знак в точке $c = 1/\sqrt{2}$ и, следовательно, упомянутое выше правило о связи нарушается. Причиной этого нарушения является другая симметрия задачи, возникающая при рассмотрении поперечных возмущений. Эта симметрия ответственна за существование неустойчивой

функции и представляет из себя вращательную симметрию вокруг оси x_1 : $G(\varphi)\mathbf{w} = \exp(\mathcal{A}\varphi)\mathbf{w}$, $\varphi \in \mathbb{S}$, где \mathcal{A} – блочно-диагональная 6×6 матрица.

Вопрос об устойчивости петлеобразной уединенной волны для $c \in [1/\sqrt{2}, 1)$ является открытым, хотя нет никаких сомнений, что импульс движущейся петли для указанного диапазона скоростей стабилизирует ее. Причиной этого утверждения является аналогия с другой задачей. Линеаризованная вокруг уединенной волны задача является в точности такой же, а из строгого анализа известна орбитальная устойчивость уединенных волн, рассматриваемых в разделе 5 для указанного диапазона скоростей (см. [6,7]).

Литература

1. Alexander J.C., Sachs R. Linear instability of solitary waves of a Boussinesq-type equation: A computer assisted computation. // *Nonlin. World.* - 1995. - v.2. - P.471–507.
2. Beliaev A., Il'ichev A. Conditional stability of solitary waves propagating in elastic rods. // *Physica. Ser.D.* - 1996. - v.90. - P.107–118.
3. Bridges T.J., Derks G. The symplectic Evans matrix, and the instability of solitary waves and fronts with symmetry. // *Arch. Rat. Mech. Anal.* - 2001. - v.156. - P.1–87.
4. Dichmann D.J., Maddocks J.H., Pego R.L. Hamiltonian dynamics of an elastica and the stability of solitary waves. // *Arch. Rat. Mech. Anal.* - 1996. - v.135. - P.347–396.
5. Grillakis M., Shatah J., Strauss W. Stability theory of solitary waves in the presence of symmetry I. // *J. Funct. Anal.* - 1987. - v.74. - P.160–197.
6. Ильичев А.Т. Устойчивость солитонов в нелинейных композитных средах. // *ЖЭТФ.* - 2000. - т.118, N3. - P.720–729.
7. Il'ichev A., Stability of solitary waves in nonlinear composite media. // *Physica. Ser.D.* - 2001. - v.150. - P.261–277.
8. Ильичев А.Т. Теория устойчивости "петли Эйлера" на упругих нерастяжимых стержнях. // *Труды МИАН.* - 2005. - т.251. - С.154–172.
9. Il'ichev A. Instability of solitary waves on Euler's elastica. // *Z. Angew. Math. Phys.* - 2006. - v.57. - P.547–566.
10. Ляв А. Математическая теория упругости. М.:ОНТИ. - 1935.
11. Pego R.L., Weinstein M.I. Eigenvalues, and instabilities of solitary waves. // *Phil. Trans.R.Soc.Lond. Ser.A.* - 1992. - v.340. - P.47–94.