

НОВЫЕ ПОДХОДЫ К МОДЕЛИРОВАНИЮ СУХОГО ТРЕНИЯ В УСЛОВИЯХ КОМБИНИРОВАННОЙ КИНЕМАТИКИ

Киреев А.А.

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН,
Москва, Россия

Сухому трению в научной литературе посвящено большое число работ, простое перечисление которых заняло бы не одну страницу. Условно эти работы могут быть разделены на три группы [1]. К первой относятся работы, в которых предметом интереса является само трение, рассматриваемое как физическое явление. В этих работах изучаются причины, приводящие к силовому взаимодействию трущихся тел и последствия такого взаимодействия, как, например, износ. Работы второй группы предназначены для потребления теми, кто интересуется статикой и динамикой трущихся тел. Предметом таких работ является математическая модель сухого трения, т.е. зависимость главного вектора и главного момента касательных сил трения от кинематических характеристик относительного движения (линейная и угловая скорость). Работы третьей группы посвящены исследованию условий равновесия, или динамики тел с сухим трением.

Одним из динамично развивающихся направлений исследований в этой области является построение модели так называемого «комбинированного» сухого трения, которое возникает, когда трущиеся тела совершают одновременно вращательное и поступательное движение.

Приведем несколько ярких примеров возникновения комбинированного трения и связанных с ним явлений. Наверняка всем хоть раз приходилось наблюдать в действии машину для натирания полов. Этот очень массивный аппарат в выключенном состоянии очень тяжело сдвинуть с места. Однако, как только щетки начинают вращаться, он легко передвигается. Кто хоть раз сидел за рулем автомобиля не понаслышке знаком с явлением заноса и с тем как тяжело повернуть рулевое колесо стоящей на месте машины. Но стоит только включить двигатель и приложить небольшой крутящий момент, как колеса легко поворачиваются, хотя и не начали вращаться. Еще одним очень ярким примером явлений возникающих при наличии комбинированного сухого трения является «китайский волчок» – полусфера с «ножкой». Если привести волчок с помощью ножки во вращение, то через некоторое время он перевернется и встанет на ножку.

Описанные выше явления, а также многочисленные задачи, в которых возникает потребность в модели сухого трения в условиях непоступательного скольжения, рассматривались часто. Но авторы уходили от её формализации, и, как следствие, наблюдалось несоответствие между теорией и результатами экспериментов.

В большинстве публикаций авторы используют одномерную модель сухого трения по Кулону, считая силу в точке контакта направленной против относительной скорости скольжения и не зависящей от ее модуля:

$$F = -F_0 \operatorname{sgn} v, (v \neq 0); -F_0 \leq F \leq F_0, (v = 0); F_0 = fN$$

здесь v – скорость относительного поступательного перемещения трущихся тел, $F_0 = fN$ – сила трения трогания, f – коэффициент сухого трения, N – сжимающая тела сила (Рис.1).

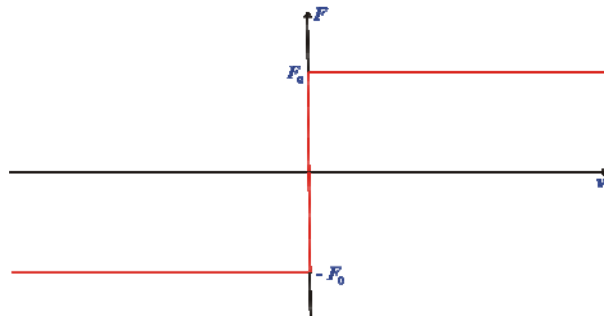


Рис.1. Сила трения по Кулону.

При этом мало кто знает, как Кулон установил свою зависимость и для каких движений она остается справедливой. Оригинальность и простота многочисленных экспериментов, которые проводил Кулон [17], стоят того, чтобы их кратко описать. На плоскую поверхность экспериментального стола помещались образцы различных материалов, к которым через блок прикреплялись грузы различной массы и два ассистента засекали время, за которое образец проходил заданное расстояние (Рис.2).

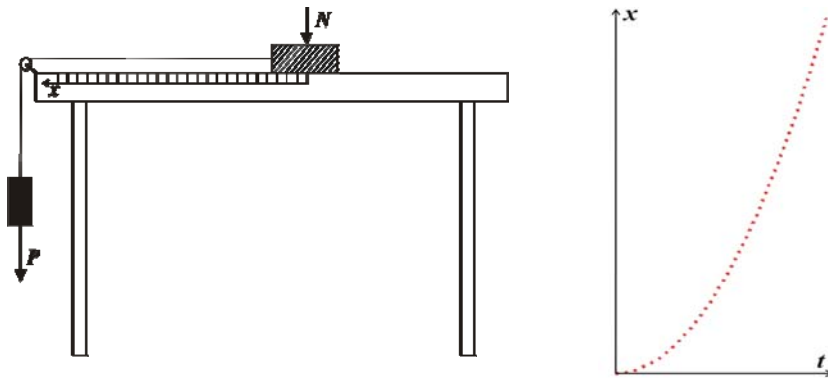


Рис.2. Схема эксперимента Кулона и графика полученной им зависимости $x(t)$ ($\ddot{x} = \text{const}$).

Из полученных зависимостей было установлено, что все движения для одних и тех же материалов трущихся поверхностей начинаются при строго определенной массе грузов и происходят с постоянным ускорением. Из последнего факта Кулон и сделал вывод, что сила трения не зависит от скорости и определяется только прижимающей силой и свойствами трущихся материалов. Установленную зависимость он записывал в следующей форме:

$$\xi F = N$$

где впервые введенный им коэффициент трения ξ принимал значения больше единицы ($\xi = 10, 20, \dots$).

Однако существуют многочисленные экспериментальные данные о несоответствии закона Кулона реальной ситуации, когда трущиеся тела участвуют одновременно в поступательном и вращательном движении. Одна из первых моделей, описывающих взаимосвязь трения скольжения и трения вращения в случае неточечного контакта движущихся тел, была предложена Контесу (Contensou P.) [2]. Предполагая, что соприкасающиеся поверхности локально сферические, а распределение контактных напряжений внутри пятна контакта определяется законом Герца [16]:

$$\sigma(x, y) = \frac{3N}{2\pi R^2} \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{R^2}}$$

где R – радиус пятна контакта, N – сжимающая сила, а ρ – радиус-вектор элементарной площадки внутри площадки контакта (Рис.3а), Контесу получил численную зависимость силы сухого трения

$$F = \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{f\sigma(\rho)(v - \omega\rho\sin(\theta))\rho}{\sqrt{v^2 - 2v\omega\rho\sin(\theta) + \rho^2\omega^2}} d\rho d\theta$$

от отношения $k = v / \rho\omega$ скорости скольжения v к линейной скорости вращения $\rho\omega$ (Рис.3б).

Контесу ограничился вычислением только силы трения, не рассматривая момент сил трения. Принципиально новое развитие теории Контесу было дано Журавлевым [3]. С помощью переноса центра координат в мгновенный центр скоростей (Рис.4), в предположении, что распределение контактных напряжений в пятне контакта подчиняется закону Герца им были получены точные аналитические выражения главного вектора F и момента M сил трения для круговых площадок контакта в элементарных функциях:

$$F = \frac{3F_0}{32} \begin{cases} \frac{\pi v(4u^2 - v^2)}{u^3}, v \leq u \\ \frac{2v(4u^2 - v^2)}{u^3} \arcsin\left(\frac{u}{v}\right) + \frac{2(2u^2 + v^2)\sqrt{v^2 - u^2}}{vu^2}, v > u \end{cases}$$

$$M = \frac{M_0}{8\pi} \begin{cases} \frac{\pi(8u^4 - 8v^2u^2 + 3v^4)}{u^4}, & v \leq u \\ \frac{2(8u^4 - 8v^2u^2 + 3v^4)}{u^4} \arcsin\left(\frac{u}{v}\right) + \frac{6(2u^2 - v^2)\sqrt{v^2 - u^2}}{u^3}, & v > u \end{cases}$$

$$M_0 = 3\pi NfR / 16, F_0 = Nf, u = \omega R$$

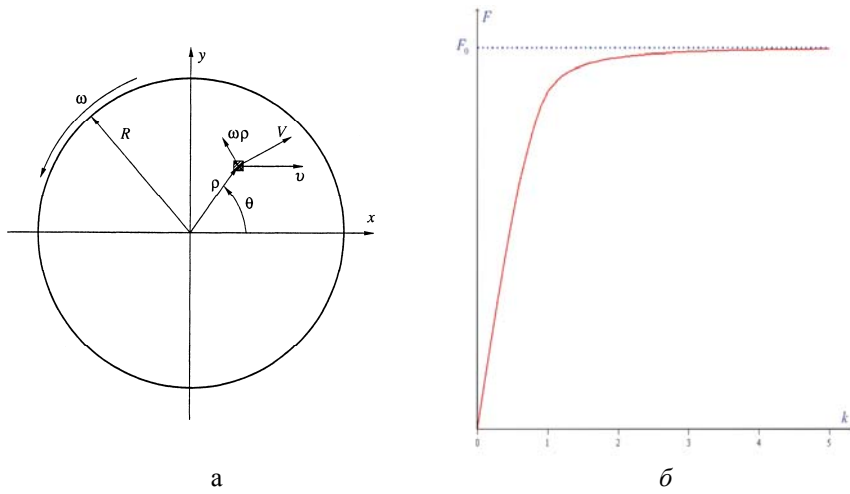


Рис.3 Закон трения Контенсу.

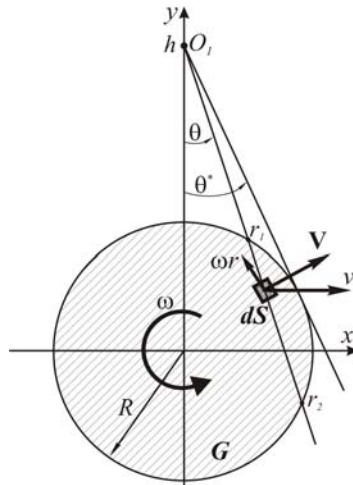


Рис.4. Перенос начала системы координат в мгновенный центр скоростей.

Для использований полученных зависимостей в задачах динамики Журавлев построил их дробно-линейные аппроксимации Паде:

$$F = F_0 \frac{v}{|v| + a|u|}, \quad M = M_0 \frac{u}{|u| + m|v|}$$

$$F_0 = F(u, v)|_{u=0}, \quad M_0 = M(u, v)|_{v=0}, \quad \frac{1}{a} = \frac{|u|}{F_0} \frac{\partial F}{\partial v} \Big|_{v=0}, \quad \frac{1}{m} = \frac{|v|}{M_0} \frac{\partial M}{\partial u} \Big|_{u=0}$$

С помощью построенных аппроксимаций им были получены качественно новые результаты о динамике тяжелого шара, скользящего с верчением по шероховатой плоскости.

Теория Журавлева была применена автором для исследования динамики однородного круглого диска, скользящего с вращением по горизонтальной плоскости [4]. В предположении, что распределение контактных напряжений распределено по параболическому закону [5]:

$$\sigma = \frac{N}{2\pi\sqrt{R^2 - \rho^2}}$$

были получены точные аналитические выражения для главного вектора и момента сил трения и построены их дробно-линейные аппроксимации Паде.

Были получены новые качественные результаты, отличающиеся от результатов работы [6], в которой данная задача была решена в предположении равномерного распределения контактных напряжений, слабо соответствующего теории упругости [5]. В частности, было показано, что в момент остановки мгновенный центр скоростей находится точно на границе диска и что движение заканчивается за конечное время.

Одно из отличий задач, изученных в [3–4], состоит в том, что сначала строятся точные выражения для главного вектора и момента сил трения, а уже на их основе – аппроксимации Паде, которые и применяются для исследования динамики. Данный подход, как и большинство использованных ранее, требует вычисления кратных интегралов по пятну контакта, что возможно только для ограниченного числа видов распределений контактных напряжений, а получаемые в результате интегрирования выражения крайне громоздки и неудобны при решении задач динамики. Более того, в реальных задачах законы распределений контактных напряжений априори неизвестны и зачастую могут быть получены только эмпирически. Многие авторы пытались решить данную проблему, однако все попытки ограничивались либо упрощенными представлениями о законе трения, либо разложениями в ряды Тейлора подынтегральных выражений [7], в зависимости от соотношения между скоростями скольжения и вращения. Для решения данной проблемы была разработана методика прямого построения аппроксимаций Паде, минуя вычисления соответствующих интегралов [8–9].

Удобство использования аппроксимаций Паде, позволяющее описывать эффекты комбинированного сухого трения для всего диапазона

угловых и линейных скоростей, привело к созданию принципиально новых моделей трения на их основе, которые могут рассматриваться как реологические, так как их коэффициенты могут быть определены из экспериментов. В зависимости от числа кинематических параметров, определяющих силовое состояние, Журавлевым [1, 9] было введено понятие размерности модели сухого трения, а в зависимости от порядка используемых Паде аппроксимаций – понятие порядка модели. Например, для круговых площадок контакта с центрально-симметричным распределением контактных напряжений [1, 9] два силовых фактора: сила трения, направленная против скорости скольжения, и момент зависят от двух кинематических факторов: угловой и линейной скоростей (двумерная модель [1,9–10]), а если форма пятна контакта отлична от круговой, то дополнительно появляются ненулевая компонента силы, направленная по нормали к траектории, и зависимость от угла поворота пятна контакта (трехмерная модель [11–13]).

Предположение о том, что в случае круговых площадок контакта распределения нормальных напряжений зависят только от радиус-вектора с началом в центре пятна контакта, хорошо применимо для моделирования комбинированного сухого трения при наличии поступательного и вращательного движения. Однако известны многочисленные экспериментальные факты о нарушении симметрии в диаграмме распределения контактных напряжений, когда трущиеся тела помимо поступательного и вращательного движения участвуют еще и в движении качения. Опираясь на эксперименты, проведенные ведущими мировыми концернами по производству шин для автомобилей, Свендениус (Svendenius) в своей диссертации [14] предложил эмпирическую зависимость влияния качения на распределение контактных напряжений. В соответствии с его результатами влияние качения состоит в перекосе симметричной диаграммы распределения в направлении мгновенной скорости качения. Этот перекос хорошо описывается линейной функцией с одним коэффициентом, зависящим от направления и скорости качения.

Нарушение в симметрии распределения нормальных контактных напряжений в случае круговых площадок контакта приводит к появлению составляющей силы трения, направленной по нормали к траектории, которая тождественно обращалась в ноль при наличии симметрии. В результате модель трения становится четырехмерной: две компоненты главного вектора и момента сил трения зависят от четырех кинематических параметров: скоростей скольжения, вращения и качения и угла между направлением качения и скольжения.

1. Связанная модель трения скольжения и качения. Построение связанной модели трения скольжения и качения проводится для круговых площадок контакта в предположении справедливости закона Кулона в дифференциальной форме для малого элемента площади dS внутри пятна контакта, в соответствии с которым дифференциалы главного вектора dF

и момента dM_c сил трения относительно центра круга определяются по формулам

$$d\mathbf{F} = -f\tilde{\sigma}(x, y) \frac{\mathbf{V}}{|\mathbf{V}|} dS, \quad dM_c = -f\tilde{\sigma}(x, y) \frac{|\mathbf{r} \times \mathbf{V}|}{|\mathbf{V}|} dS, \quad \mathbf{V} = (v - \omega y, \omega x) \quad (2.1)$$

где f – коэффициент трения, $\mathbf{r} = (x, y)$ – радиус-вектор элементарной площадки внутри пятна контакта относительно его центра (Рис.5), $\tilde{\sigma}(x, y)$ – распределение нормальных контактных напряжений, v – линейная скорость скольжения, а ω – угловая скорость вращения центра пятна контакта.

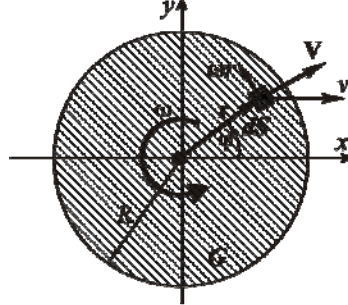


Рис.5. Схема пятна контакта без качения.

Перекос, возникающий при отличной от нуля угловой скорости качения ω_r , в симметричной диаграмме распределения контактных напряжений $\sigma(x, y)$ в прямоугольной системе координат $\{xOy\}$, ось x которой направлена вдоль мгновенной скорости скольжения (Рис.6), описывается зависимостью

$$\tilde{\sigma}(x, y) = \sigma(x, y) \left(1 + k_r \frac{\xi(x, y)}{R} \right), \quad |k_r| \leq 1, \quad k_r \equiv 0, \quad \omega_r = 0 \quad (2.2)$$

где R – радиус пятна контакта, ξ – ось прямоугольной системы координат, направленная перпендикулярно мгновенной скорости качения (Рис.6), а k_r – безразмерный коэффициент, знак которого зависит от направления качения.

Ограничения, накладываемые на значения k_r , обусловлены требованием того, чтобы центр тяжести распределения контактных напряжений не выходил за границы пятна контакта. Типичное поведение функции (2.2) для пятна контакта единичного радиуса, нормированной на величину N нормальной реакции плоскости скольжения, для различных значений k_r представлено на Рис.8 штриховой линией в предположении, что при отсутствии качения распределение контактных напряжений (сплошная линия на Рис.7) подчиняется закону Герца [15]:

$$\sigma(x, y) = \frac{3N}{2\pi R^2} \sqrt{1 - \frac{x^2}{R^2} - \frac{y^2}{R^2}} \quad (2.3)$$

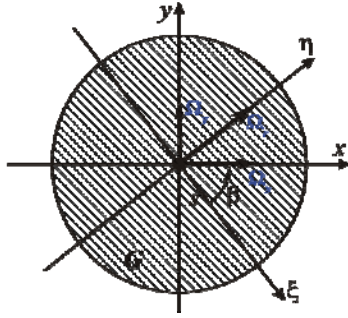


Рис.6. Схема пятна контакта при наличии качения

Связь систем координат $\{xOy\}$ и $\{\xi O\eta\}$ дается с помощью преобразования поворота на угол $\beta \in [0, \pi/2]$, который определяется из значений проекций Ω_x, Ω_y мгновенной скорости качения Ω_r на оси x и y соответственно (Рис.6):

$$\begin{aligned} \xi &= x \cos \beta - y \sin \beta, & \eta &= x \sin \beta + y \cos \beta \\ \cos \beta &= \Omega_y / \Omega_r, & \sin \beta &= \Omega_x / \Omega_r, & \Omega_r &= \sqrt{\Omega_x^2 + \Omega_y^2} \end{aligned} \quad (2.4)$$

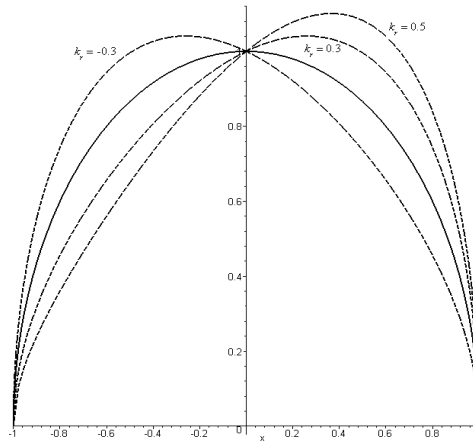


Рис.7. Влияние качения на распределение контактных напряжений в случае Герца.

Подстановка выражений (2.4) в представление (2.2) дает зависимость распределения контактных напряжений от направления и величины скорости качения:

$$\tilde{\sigma}(x, y) = \sigma(x, y) \left(1 + \frac{k_r}{R\Omega_r} (x\Omega_y - y\Omega_x) \right), |k_r| \leq 1, k_r \equiv 0 \text{ при } \Omega_r = 0 \quad (2.5)$$

1.1 Интегральная модель и ее свойства. Для получения главного вектора и момента сил трения необходимо выражения (2.1) проинтегрировать по пятну контакта. Получаемые зависимости, в которых через F_{\square} и F_{\perp} обозначены компоненты главного вектора, направленные, соответственно, по касательной и нормали к траектории движения, представляют точную связанную интегральную модель трения скольжения и качения:

$$\begin{aligned} F_{\square}(u, v) &= -f \iint_G \frac{(v - \omega y) \tilde{\sigma}(x, y)}{\sqrt{\omega^2(x^2 + y^2) + v^2 - 2\omega v y}} dx dy \\ F_{\perp}(u, v) &= -f \iint_G \frac{\omega x \tilde{\sigma}(x, y)}{\sqrt{\omega^2(x^2 + y^2) + v^2 - 2\omega v y}} dx dy \\ M_C(u, v) &= -f \iint_G \frac{(\omega(x^2 + y^2) - vy) \tilde{\sigma}(x, y)}{\sqrt{\omega^2(x^2 + y^2) + v^2 - 2\omega v y}} dx dy \\ u &\equiv \omega R, \quad G = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq R^2\} \end{aligned} \quad (2.6)$$

Следуя рекомендациям работы [16], нормируем переменные x и y в равенствах (2.6) с помощью характерного размера, равного радиусу пятна контакта R : $x = \hat{x}R$, $y = \hat{y}R$ и введем безразмерную функцию распределения $\sigma(\hat{x}, \hat{y}) = \hat{\sigma}(\hat{x}, \hat{y})N/R^2$. С использованием введенных обозначений выражения (2.6), в которых для краткости записи опущен значок «крышечка», ($x \equiv \hat{x}$, $y \equiv \hat{y}$, $\sigma \equiv \hat{\sigma}$) переписываются в виде

$$\begin{aligned} F_{\square} &= -fN \iint_D \frac{(v - uy)\sigma(x, y)(1 + k_r(x\Omega_y - y\Omega_x)/\Omega_r)}{\sqrt{u^2(x^2 + y^2) + v^2 - 2uvy}} dx dy \\ F_{\perp} &= -fN \iint_D \frac{ux\sigma(x, y)(1 + k_r(x\Omega_y - y\Omega_x)/\Omega_r)}{\sqrt{u^2(x^2 + y^2) + v^2 - 2uvy}} dx dy \\ M_C &= -fRN \iint_D \frac{(u(x^2 + y^2) - vy)\sigma(x, y)(1 + k_r(x\Omega_y - y\Omega_x)/\Omega_r)}{\sqrt{u^2(x^2 + y^2) + v^2 - 2uvy}} dx dy \\ D &= \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\} \end{aligned} \quad (2.7)$$

Считая, что распределение нормальных контактных напряжений в отсутствии качения обладает центральной симметрией $\sigma(x, y) = \sigma(r)$, для вычисления модулей интегралов (2.5) удобно перейти к полярным координатам: $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, $r \in [0, 1]$, $\varphi \in [0, 2\pi]$ (Рис.5), в которых функции (2.7) приобретают вид:

$$\begin{aligned}
F_{\parallel} &= fN \int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{(v - ur \sin \varphi) r \sigma(r) (1 + k_r (\Omega_y r \cos \varphi - \Omega_x r \sin \varphi) / \Omega_r)}{\sqrt{u^2 r^2 + v^2 - 2uvr \sin \varphi}} dr d\varphi \equiv \\
&\equiv fN \int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{(v - ur \sin \varphi) r \sigma(r) (1 - k_r \Omega_x r \sin \varphi / \Omega_r)}{\sqrt{u^2 r^2 + v^2 - 2uvr \sin \varphi}} dr d\varphi \\
F_{\perp} &= fN \int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{ur \cos \varphi r \sigma(r) (1 + k_r (\Omega_y r \cos \varphi - \Omega_x r \sin \varphi) / \Omega_r)}{\sqrt{u^2 r^2 + v^2 - 2uvr \sin \varphi}} dr d\varphi \equiv \\
&\equiv \frac{fN k_r \Omega_y}{\Omega_r} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{ur^3 \sigma(r) \cos^2 \varphi}{\sqrt{u^2 r^2 + v^2 - 2uvr \sin \varphi}} dr d\varphi \\
M_C &= fRN \int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{(ur^2 - vr \sin \varphi) r \sigma(r) (1 + k_r (\Omega_y r \cos \varphi - \Omega_x r \sin \varphi) / \Omega_r)}{\sqrt{u^2 r^2 + v^2 - 2uvr \sin \varphi}} dr d\varphi \equiv \\
&\equiv fRN \int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{(ur^2 - vr \sin \varphi) r \sigma(r) (1 - k_r \Omega_x r \sin \varphi / \Omega_r)}{\sqrt{u^2 r^2 + v^2 - 2uvr \sin \varphi}} dr d\varphi
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Переход в модели (2.8) от рассмотрения взаимосвязи трения качения и скольжения, записанной в терминах проекций скоростей качения Ω_x и Ω_y к углу β между направлением качения и скольжения, как это принято в автомобильной промышленности, дает:

$$\begin{aligned}
F_{\parallel} &= fN \int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{(v - ur \sin \varphi) r \sigma(r) (1 - k_r r \sin \varphi \sin \beta)}{\sqrt{u^2 r^2 + v^2 - 2uvr \sin \varphi}} dr d\varphi \\
F_{\perp} &= fN k_r \cos \beta \int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{ur^3 \sigma(r) \cos^2 \varphi}{\sqrt{u^2 r^2 + v^2 - 2uvr \sin \varphi}} dr d\varphi \\
M_C &= fRN \int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{(ur^2 - vr \sin \varphi) r \sigma(r) (1 - k_r r \sin \varphi \sin \beta)}{\sqrt{u^2 r^2 + v^2 - 2uvr \sin \varphi}} dr d\varphi
\end{aligned} \tag{2.9}$$

Графики нормированных функций (2.9) как функции параметра $k = v/u$, полученные численно для распределения контактных напряжений, подчиняющегося закону Герца (2.3) при $\beta = \pi/4$, представлены на Рис. 8 сплошной линией. Значение $k = 0$ соответствует комбинации качения и скольжения при чистом $v = 0$ верчении, а значение $k = \infty$ при отсутствии верчения $u = 0$.

Выражения для компонент главного вектора и момента сил трения в равенствах (2.8)–(2.9) как функции u и v обладают рядом важных свойств.

Свойство 1. Если движение качения отсутствует, то $k_r \equiv 0$, и, следовательно, $F_{\perp} = 0$. Выражения (2.8) в этом случае представляют связанную двумерную интегральную модель трения скольжения и верчения, подробно исследованную в работах [1], [3], [9]:

$$F_{\square}(u, v) = fN \int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{(v - ur \sin \varphi) r \sigma(r) dr d\varphi}{\sqrt{u^2 r^2 + v^2 - 2uvr \sin \varphi}},$$

$$M_c(u, v) = fRN \int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{(ur^2 - vr \sin \varphi) r \sigma(r) dr d\varphi}{\sqrt{u^2 r^2 + v^2 - 2uvr \sin \varphi}} \quad (2.10)$$

Свойство 2. Взаимосвязь трения качения и скольжения приводит к появлению компоненты главного вектора F_{\perp} , направленной по нормали к траектории движения. Главный вектор при наличии движения качения не направлен против скорости, как в случае чистого скольжения.

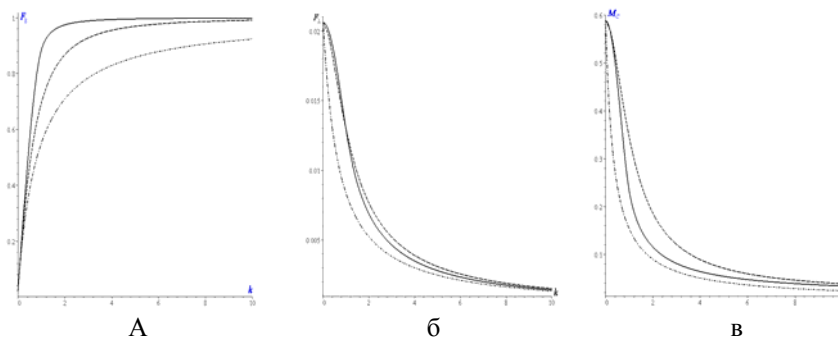


Рис.8. Сравнение моделей трения.

Свойство 3. Если направления скольжения и качения совпадают, то перекос в симметричной диаграмме распределения нормальных напряжений, возникающий вследствие учета влияния трения качения, не оказывает никакого влияния на момент M_c и компоненту главного вектора F_{\square} , направленную по касательной к траектории. Они в точности точно такие же, как и в случае комбинации только поступательного и вращательного движения, и определяются функциями (2.10).

Коэффициент k_r , определяющий зависимость силового состояния от движения качения, входит в соответствующие выражения (2.8) линейно, не зависит от переменных интегрирования и, следовательно, может быть вынесен за знак интеграла.

В силу ограничений накладываемых в формуле (2.2) на функцию k_r , члены, описывающие в моделях (2.7)–(2.9) взаимосвязь трения качения и скольжения имеют первый порядок малости и, следовательно, при ее учете в задачах динамики допустимо использование асимптотических методов.

Свойство 4. Если на протяжении всего времени движения направление качения перпендикулярно направлению скольжения, то нормальная составляющая силы трения F_{\perp} исчезает, и, модель трения

становится двумерной, отличающейся от моделей изученных в [1], [3], [9], небольшими поправками порядка коэффициента качения k_r .

Свойство 5. Касательная F_{\parallel} и нормальная F_{\perp} составляющие силы трения, так же, как и момент M_C – однородные функции переменных u и v нулевого порядка однородности и, следовательно, инвариантны относительно группы подобия:

$$F_{\parallel}(\lambda u, \lambda v) \equiv F_{\parallel}(u, v), \quad F_{\perp}(\lambda u, \lambda v) \equiv F_{\perp}(u, v), \quad M_C(\lambda u, \lambda v) \equiv M_C(u, v)$$

Свойство 6. Выражения (2.7)–(2.8) для момента и обеих составляющих силы трения как функции u и v имеют особенность в точке в точке $(u, v) = (0, 0)$, так как не имеют предела в этой точке по совокупности переменных u и v .

Свойство 7. В случае чистого скольжения нормальная составляющая обращается в нуль $F_{\perp}(0, v) = 0$ и, следовательно, сила трения направлена против вектора скорости, а при чистом вращении

$$F_{\perp}(u, 0) = k_r F_r \frac{\Omega_y}{\Omega_r} \equiv k_r F \cos \beta, \quad F_r = \pi f N \int_0^1 \sigma(r) r^2 dr \quad (2.11)$$

Если распределение контактных напряжений подчиняется закону Герца (2.3), то

$$F_r = \frac{3fN}{2} \int_0^1 \sqrt{1-r^2} r^2 dr = \frac{3\pi fN}{32} \quad (2.12)$$

Свойство 8. В случае чистого скольжения ($u = 0$) или вращения ($v = 0$) момент M_C и касательная составляющая F_{\parallel} представляют собой одномерные модели соответствующие обычному закону Кулона:

$$F_{\parallel}(0, v) = F_0, \quad F_0 = 2\pi f N \int_0^1 \sigma(r) r dr \equiv fN, \quad (2.13)$$

$$M_C(u, 0) = M_0, \quad M_0 = 2\pi f N R \int_0^1 \sigma(r) r^2 dr$$

Свойство 9. Взаимосвязь трения качения и скольжения приводит к появлению момента трения вращения M_C при нулевой скорости вращения u и касательной составляющей силы трения F_{\parallel} при нулевой скорости скольжения v :

$$F_{\parallel}(u, 0) = k_r F_r \frac{\Omega_x}{\Omega_r} \equiv k_r F_r \sin \beta, \quad M_C(0, v) = k_r M_{ur} \frac{\Omega_x}{\Omega_r} \equiv k_r M_{ur} \sin \beta, \quad (2.14)$$

$$M_{ur} = \pi f N R \int_0^1 r^3 \sigma(r) dr$$

Если распределение контактных напряжений подчиняется закону Герца (2.3), то F_r определяется по формуле (2.12), а последний интеграл в (2.14) легко вычисляется и равен:

$$M_{ur} = \pi fNR \int_0^1 r^3 \sqrt{1-r^2} dr = \frac{fNR}{5} \quad (2.15)$$

Свойство 10. Момент M_c и обе составляющие силы трения F_{\parallel} и F_{\perp} имеют единственную отличную от нуля первую частную производную. Остальные производные тождественно равны нулю:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial M_c}{\partial u} \right|_{u=0} &= \frac{\pi fNR}{v} \int_0^1 \sigma(r) r^3 dr, & \left. \frac{\partial F_{\parallel}}{\partial v} \right|_{v=0} &= \frac{\pi F_0}{u} \int_0^1 \sigma(r) dr, \\ \left. \frac{\partial F_{\perp}}{\partial u} \right|_{u=0} &= \frac{\pi k_r fN \Omega_y}{v \Omega_r} \int_0^1 \sigma(r) r^3 dr \\ \left. \frac{\partial M_c}{\partial v} \right|_{v=0} &= \left. \frac{\partial M_c}{\partial v} \right|_{u=0} = \left. \frac{\partial M_c}{\partial u} \right|_{v=0} = \left. \frac{\partial F_{\parallel}}{\partial u} \right|_{u=0} = \left. \frac{\partial F_{\parallel}}{\partial v} \right|_{u=0} = \left. \frac{\partial F_{\parallel}}{\partial u} \right|_{v=0} = \\ &= \left. \frac{\partial F_{\perp}}{\partial v} \right|_{v=0} = \left. \frac{\partial F_{\perp}}{\partial v} \right|_{u=0} = \left. \frac{\partial F_{\perp}}{\partial u} \right|_{v=0} = 0 \end{aligned} \quad (2.16)$$

Для распределения нормальных контактных напряжений по Герцу (2.3) интегралы (2.16) вычисляются в квадратурах:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial M_c}{\partial u} \right|_{u=0} &= \frac{3fNR}{2v} \int_0^1 r^3 \sqrt{1-r^2} dr = \frac{16}{15\pi} \frac{M_0}{v}, \quad M_0 = \frac{3\pi}{16} fNR, \\ \left. \frac{\partial F_{\parallel}}{\partial v} \right|_{v=0} &= \frac{3F_0}{2u} \int_0^1 \sqrt{1-r^2} dr = \frac{3\pi}{8} \frac{F_0}{u}, \quad F_0 = fN, \\ \left. \frac{\partial F_{\perp}}{\partial u} \right|_{u=0} &= \frac{3k_r fN \Omega_y}{2v \Omega_r} \int_0^1 r^3 \sqrt{1-r^2} dr = \frac{32k_r}{15\pi} \frac{F_r}{v} \frac{\Omega_y}{\Omega_r} \end{aligned} \quad (2.17)$$

Свойство 11. Если считать, что распределение нормальных сил $\tilde{\sigma}(x, y)$ играет роль плотности, то нарушение в его центральной симметрии, определенное по формуле (2.2), приводит к смещению центра тяжести пятна контакта относительно геометрического центра O по направлению качения (вдоль оси ξ (Рис.6)) на величину s , проекции которой на оси x и y определяются по формулам:

$$\begin{aligned} s_x &= \iint_G x \tilde{\sigma}(x, y) dx dy / \iint_G \tilde{\sigma}(x, y) dx dy, \\ s_y &= \iint_G y \tilde{\sigma}(x, y) dx dy / \iint_G \tilde{\sigma}(x, y) dx dy \end{aligned} \quad (2.18)$$

Подстановка выражения (2.5) в формулы (2.18), с последующим переходом к введенным выше полярным координатам $\{r, \varphi\}$ дает:

$$s_x = sk_r \frac{\Omega_y}{\Omega_r} \equiv sk_r \cos \beta, \quad s_y = -sk_r \frac{\Omega_x}{\Omega_r} \equiv -sk_r \sin \beta, \quad s \equiv \pi R \int_0^1 \sigma(r) r^3 dr \quad (2.19)$$

Если направления качения и скольжения совпадают, то смещение центра тяжести пятна контакта происходит по направлению скольжения на величину s , определяемую по формуле (2.19). Интеграл (2.19) для распределения контактных напряжений по Герцу (2.3) вычисляется в квадратурах и равен

$$s = \frac{3R}{2} \int_0^1 \sqrt{1-r^2} r^3 dr = \frac{R}{5} \quad (2.20)$$

Свойство 12. Смещение центра пятна контакта, вычисляемое по формулам (2.19), приводит к появлению момента качения \mathbf{M}_r , параллельного плоскости скольжения, проекции которого на направления касательной и нормали к траектории движения определяются по формулам:

$$M_{\square} = -M_r \frac{\Omega_y}{\Omega_r} \equiv -M_r \cos \beta, \quad M_{\perp} = -M_r \frac{\Omega_x}{\Omega_r} \equiv -M_r \sin \beta, \quad M_r \equiv sk_r N \quad (2.21)$$

Таким образом, главный вектор момента сил трения в прямоугольной системе координат с началом в центре круга контакта, ось x которой направлена по направлению скольжения, а ось y – по нормали, имеет вид:

$$\mathbf{M} = (M_{\square}, M_{\perp}, -M_C) \quad (2.22)$$

причем его компоненты M_{\square} и M_{\perp} вычисляются по формулам (2.21), а M_C – по формулам (2.8)–(2.9).

При совпадении направлений качения и скольжения компонента M_{\perp} момента трения качения \mathbf{M}_r , направленная по нормали к траектории движения, обращается в ноль, а касательная составляющая есть $M_{\square} = -M_r$, причем ее модуль M_r определяется по формулам (2.21).

1.2. Модели, основанные на аппроксимациях Паде. Интегральные модели (2.7)–(2.9) хорошо описывают взаимосвязь трения качения и скольжения, но неудобны для применения в задачах динамики, так как требуют вычисления кратных интегралов в правых частях уравнений движения. Избежать данного затруднения позволяет замена точных интегральных выражений соответствующими аппроксимациями Паде, как это было сделано при построении связанных моделей трения скольжения и качения [1,3,9,17]. Наиболее простой из них является дробно-линейная аппроксимация, сохраняющая значения в нуле и на бесконечности как самих функций (2.7)–(2.8), так и их первых производных:

$$M_C = \frac{M_0 u + m_1 v}{u + mv}, \quad F_{\square} = \frac{F_0 v + a_1 u}{v + au}, \quad F_{\perp} = k_r F_r \frac{u}{u + bv} \frac{\Omega_y}{\Omega_r} \quad (2.23)$$

Коэффициенты F_0 , F_r , M_0 модели (2.23) определяются по формулам (2.12)–(2.13), а остальные коэффициенты находятся из решения простой системы алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{a_{\perp}}{a} &= k_r F_r \frac{\Omega_x}{\Omega_r}, & \frac{F_0 a - a_{\perp}}{u a^2} &= \frac{\partial F_{\square}}{\partial v} \Big|_{v=0}, \\ \frac{m_{\perp}}{m} &= k_r M_{\text{вр}} \frac{\Omega_x}{\Omega_r}, & \frac{M_0 m - m_{\perp}}{v a^2} &= \frac{\partial M_C}{\partial u} \Big|_{u=0}, & \frac{1}{b} &= \frac{v}{k_r F_r} \frac{\partial F_{\perp}}{\partial u} \Big|_{u=0} \end{aligned} \quad (2.24)$$

в которых при вычислении производных функции $F_{\square}(u, v)$ и $M_C(u, v)$ определяются в зависимости от конкретной задачи выражениями (2.7) или (2.8)–(2.9). Например, если распределения нормальных напряжений подчиняются закону Герца, коэффициенты модели (2.22) вычисляются по формулам (2.12), (2.15), (2.17). С учетом приближенного характера модели и малости коэффициента качения k_r условия (2.24) для определения коэффициентов модели (2.23) допускают упрощения, в соответствии с которыми модель первого порядка имеет вид:

$$\begin{aligned} M_C &= \frac{M_0 u + k_r M_{\text{вр}} v \Omega_x / \Omega_r}{u + m v} \equiv \frac{M_0 u + k_r M_{\text{вр}} v \sin \beta}{u + m v} \\ F_{\square} &= \frac{F_0 v + k_r F_r u \Omega_x / \Omega_r}{v + a u} \equiv \frac{F_0 v + k_r F_r u \sin \beta}{v + a u} \\ F_{\perp} &= k_r F_r \frac{u}{u + b v} \frac{\Omega_y}{\Omega_r} \equiv \frac{k_r F_r u \cos \beta}{u + b v} \\ \frac{1}{a} &= \frac{u}{F_0} \frac{\partial F_{\square}}{\partial v} \Big|_{v=0}, & \frac{1}{m} &= \frac{v}{M_0} \frac{\partial M_C}{\partial u} \Big|_{u=0}, & \frac{1}{b} &= \frac{v}{k_r F_r} \frac{\partial F_{\perp}}{\partial u} \Big|_{u=0} \end{aligned} \quad (2.25)$$

Дробно-линейные аппроксимация Паде (2.25) сохраняют значения функций $F_{\square}(u, v)$, $F_{\perp}(u, v)$ и $M_C(u, v)$ в нуле, а также их поведение и поведение их первых производных на бесконечности. Однако данный вид модели не позволяет полностью сохранить значения всех первых частных производных функций (2.7)–(2.9) в нуле. Ситуация аналогична рассмотренной в [1] при исследовании двумерной связанной модели трения скольжения и верчения. Для правильного описания поведения в нуле первых производных требуется привлечение аппроксимаций Паде второго порядка, при использовании которых связанная модель трения качения и скольжения имеет вид:

$$\begin{aligned}
M_c &= \frac{M_0(u^2 + muv)}{v^2 + muv + u^2} + \frac{k_r M_{ur} v^2}{u^2 + v^2} \frac{\Omega_x}{\Omega_r} \equiv \frac{M_0(u^2 + muv)}{u^2 + muv + v^2} + \frac{k_r M_{ur} v^2 \sin \beta}{u^2 + v^2} \\
F_{\square} &= \frac{F_0(v^2 + auv)}{v^2 + auv + u^2} + \frac{k_r F_r u^2}{u^2 + v^2} \frac{\Omega_x}{\Omega_r} \equiv \frac{F_0(v^2 + auv)}{v^2 + auv + u^2} + \frac{k_r F_r u^2 \sin \beta}{u^2 + v^2} \\
F_{\perp} &= \frac{k_r F_r (u^2 + buv)}{v^2 + buv + u^2} \frac{\Omega_y}{\Omega_r} \equiv \frac{k_r F_r (u^2 + buv) \cos \beta}{v^2 + buv + u^2} \\
a &= \frac{u}{F_0} \left. \frac{\partial F_{\square}}{\partial v} \right|_{v=0}, \quad m = \frac{v}{M_0} \left. \frac{\partial M_c}{\partial u} \right|_{u=0}, \quad b = \frac{v}{k_r F_r} \left. \frac{\partial F_{\perp}}{\partial u} \right|_{u=0}
\end{aligned} \tag{2.26}$$

Модель второго порядка (2.26) полностью удовлетворяет всем вышеперечисленным свойствам 1–10 точных интегральных моделей (2.7)–(2.9). Однако, как было показано в [1], для большинства задач динамики достаточно использовать модель первого порядка (2.25). Модель второго порядка (2.26) требуется для более точного качественного анализа, например, для определения границ зоны застоя и времени остановки движения. Графики нормированных функций (2.25)–(2.26) как функций параметра $k = v/u$, для распределения контактных напряжений, подчиняющихся закону Герца (2.3) при $\beta = \pi/4$, представленные на Рис. 8, соответственно, штрихпунктирными и штриховыми линиями, ярко демонстрируют хорошее соответствие моделей трения на основе аппроксимаций Паде точным интегральным моделям.

Если направления скольжения и качения совпадают, то модели (2.25)–(2.26) упрощаются и имеют более компактную форму:

$$\begin{aligned}
M_c &= M_0 \frac{u}{u + mv}, \quad F_{\square} = F_0 \frac{v}{v + au}, \quad F_{\perp} = k_r F_r \frac{u}{u + bu} \\
\frac{1}{a} &= \frac{u}{F_0} \left. \frac{\partial F_{\square}}{\partial v} \right|_{v=0}, \quad \frac{1}{m} = \frac{v}{M_0} \left. \frac{\partial M_c}{\partial u} \right|_{u=0}, \quad \frac{1}{b} = \frac{v}{k_r F_r} \left. \frac{\partial F_{\perp}}{\partial u} \right|_{u=0} \\
M_c &= \frac{M_0(u^2 + muv)}{v^2 + muv + u^2}, \quad F_{\square} = \frac{F_0(v^2 + auv)}{v^2 + auv + u^2}, \quad F_{\perp} = \frac{k_r F_r (u^2 + buv)}{v^2 + buv + u^2} \\
a &= \frac{u}{F_0} \left. \frac{\partial F_{\square}}{\partial v} \right|_{v=0}, \quad m = \frac{v}{M_0} \left. \frac{\partial M_c}{\partial u} \right|_{u=0}, \quad b = \frac{v}{k_r F_r} \left. \frac{\partial F_{\perp}}{\partial u} \right|_{u=0}
\end{aligned} \tag{2.27}$$

$$\tag{2.28}$$

Равенства (2.27) в этом случае представляют модель первого порядка (2.23)–(2.25), а равенства (2.28) – модель второго порядка (2.26).

Выражения, описывающие поведение касательной составляющей силы трения F_{\square} и момента сил трения M_c , в случае модели (2.27) полностью совпадают с двумерной моделью трения скольжения и вращения первого порядка [1, 3, 9], а в случае модели второго порядка (2.28) могут рассматриваться как двумерная модель трения скольжения и вращения второго порядка. Модель трения скольжения и вращения второго порядка на основе формул (2.28). в отличие от построенной в [1], не требует

привлечения дополнительных условий для определения коэффициентов модели.

Аппроксимации (2.24)–(2.26) и (2.27)–(2.28) справедливы для положительных значений u и v . Они легко обобщаются на случай произвольных по знаку скоростей u и v формальной заменой их на абсолютные значения в знаменателях соответствующих выражений.

Использование моделей трения на основе аппроксимаций Паде позволяет избежать вычисления кратных интегралов по пятну контакта, что значительно упрощает их использование в задачах динамики. Более того, модели (2.25)–(2.26) и (2.27)–(2.28) могут рассматриваться как четырехмерные реологические модели первого и второго порядка соответственно. Для корректного описания взаимосвязи трения качения и скольжения в полной постановке на основе моделей (2.25)–(2.26) необходимо знать всего шесть коэффициентов, которые при решении реальных задач практики могут быть определены из эксперимента.

1.3 Случай Герца. Если распределение нормальных контактных напряжений подчиняются закону Герца (2.3), то с помощью переноса начала системы координат в мгновенный центр скоростей O_1 можно получить точные уравнения модели в элементарных функциях.

Нормальная и касательная составляющие главного вектора сил трения в полярной системе координат $\{O_1, r, \theta\}$, с началом в мгновенном центре скоростей (Рис.4), отстоящим от геометрического центра пятна контакта на величину $h = v/\omega \equiv kR$ в направлении нормали к скорости скольжения v определяются по формулам:

$$F_{\parallel} = fR^2 \iint_G \bar{\sigma}(q, \theta) q \cos \theta dq d\theta, \quad F_{\perp} = fR^2 \iint_G \bar{\sigma}(q, \theta) q \sin \theta dq d\theta \quad (2.29)$$

Пределы интегрирования в формуле (2.29) зависят от расположения мгновенного центра скоростей. Если мгновенный центр скоростей находится внутри пятна контакта $k \leq 1$, то полярный угол $\theta \in [0, 2\pi]$, а если вне пятна контакта, то $\theta \in [-\theta^*, \theta^*]$, $\sin \theta^* = R/h \equiv 1/k$. Интервал изменения безразмерного радиус-вектора $q = r/R$ находится из условий пересечения полярного луча с окружностью пятна контакта:

$$q \in [q_1, q_2], \quad q_1 = k \cos \theta - \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}, \quad q_2 = k \cos \theta + \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta} \quad (2.30)$$

Распределение контактных напряжений, подчиняющееся закону Герца (2.3), во введенных переменных имеет вид:

$$\bar{\sigma}(q, \theta) = \frac{3N}{2\pi R^2} \sqrt{-q^2 + 2kq \cos(\theta) + 1 - k^2} \left(1 + \frac{k_r}{\Omega_r} (\Omega_y q \sin \theta - \Omega_x (k - q \cos \theta)) \right)$$

Подстановка этого выражения в формулу (2.27), с учетом формул (2.28) и места расположения центра мгновенных скоростей, определяет касательную и нормальную составляющие силы трения как кусочно-непрерывные функции параметра k , гладкие в точке сшивания:

$$F_{\square} = \begin{cases} \frac{3fN}{2\pi} \int_{-\theta'_{q_1}}^{\theta'_{q_2}} \int \sqrt{-q^2 + 2kq \cos(\theta) + 1 - k^2} q \left(1 - \frac{k_r \Omega_x}{\Omega_r} (k - q \cos \theta) \right) \cos \theta dq d\theta, k > 1 \\ \frac{3fN}{2\pi} \int_0^{q_2} \int \sqrt{-q^2 + 2kq \cos(\theta) + 1 - k^2} q \left(1 - \frac{k_r \Omega_x}{\Omega_r} (k - q \cos \theta) \right) \cos \theta dq d\theta, k \leq 1 \end{cases} \quad (2.31)$$

$$F_{\perp} = \begin{cases} \frac{3fNk_r \Omega_y}{2\pi \Omega_r} \int_{-\theta'_{q_1}}^{\theta'_{q_2}} \int \sqrt{-q^2 + 2kq \cos(\theta) + 1 - k^2} q^2 \sin^2 \theta dq d\theta, k > 1 \\ \frac{3fNk_r \Omega_y}{2\pi \Omega_r} \int_0^{q_2} \int \sqrt{-q^2 + 2kq \cos(\theta) + 1 - k^2} q^2 \sin^2 \theta dq d\theta, k \leq 1 \end{cases}$$

Интегралы (2.31) вычисляются в квадратурах. Результат интегрирования представляет запись нормальной составляющей как функции двух параметров $k \in [0, +\infty)$ и $k_r \in [-1, 1]$:

$$F_{\square} = \frac{3\pi F_0}{32} \left(1 - \frac{k_r \Omega_x}{\Omega_r} k \right) \begin{cases} \left(2k^2 (4 - k^2) \arcsin(1/k) + 2\sqrt{k^2 - 1} (2 + k^2) \right) / (2\pi), k \geq 1 \\ k(4 - k^2) / 8, k \leq 1 \end{cases}$$

$$+ \frac{3\pi F_0 k_r \Omega_x}{32 \Omega_r} \begin{cases} \left(k^2 (24 + 60k^2 - 9k^4) \arcsin(1/k) + \sqrt{k^2 - 1} (9k^4 + 74k^2 - 8) \right) / (6\pi k^2), k \geq 1 \\ (8 + 20k^2 - k^4) / 4, k \leq 1 \end{cases} \quad (2.32)$$

$$F_{\perp} = \frac{k_r F_0 \Omega_y}{\Omega_r} \begin{cases} (2 - k^2 + 3k^4 / 12) \arcsin(1/k) + \sqrt{k^2 - 1} (8 + 10k^2 - 3k^4) / (12k^2), k \geq 1 \\ (8 - 4k^2 + k^4) / 8, k \leq 1 \end{cases}$$

$$F_0 = fN, \quad F_r = 3\pi fN / 32$$

Момент вращения M_C вычисляется на основании равенства [3]: $M_C = M_h - hF_{\square}$, где M_h главный момент сил трения относительно мгновенного центра скоростей:

$$M_h = \frac{3fNR}{2\pi} \begin{cases} \int_{-\theta'_{q_1}}^{\theta'_{q_2}} \int \sqrt{-q^2 + 2kq \cos(\theta) + 1 - k^2} q^2 \left(1 - \frac{k_r \Omega_x}{\Omega_r} (k - q \cos \theta) \right) dq d\theta, k > 1 \\ \int_0^{q_2} \int \sqrt{-q^2 + 2kq \cos(\theta) + 1 - k^2} q^2 \left(1 - \frac{k_r \Omega_x}{\Omega_r} (k - q \cos \theta) \right) dq d\theta, k \leq 1 \end{cases} \quad (2.33)$$

Интегралы (2.33) также вычисляются в элементарных функциях.

Таким образом, перенос начала системы координат в мгновенный центр скоростей позволяет построить в случае Герца точную связанную модель трения качения и скольжения, записанную элементарных функциях. Однако полученный результат слишком громоздкий и неудобный. Чтобы использовать его в задачах динамики приходится сначала строить соответствующие аппроксимации Паде. Следовательно, даже если удастся точно проинтегрировать уравнения модели, наиболее эффективным подходом является использование построенных выше моделей основанных на прямом построении аппроксимаций Паде.

Заключение. Описанные выше исследования показывают, что формула (2.5), предложенная для аналитического описания сдвига симметричной диаграммы распределения нормальных контактных напряжений в направлении качения, позволяет корректно интерпретировать взаимосвязь трения качения и скольжения. Использование моделей трения (2.25)–(2.26) и (2.27)–(2.28) на основе аппроксимаций Паде вместо точных интегральных моделей (2.8)–(2.9) позволяет избежать вычисления кратных интегралов по пятну контакта, что значительно упрощает использование связанной модели качения и скольжения в задачах динамики. Более того, модели (2.25)–(2.26) и (2.27)–(2.28) могут рассматриваться как четырехмерные реологические модели первого и второго порядка соответственно. Для корректного описания взаимосвязи трения качения и скольжения в полной постановке на основе моделей (2.25)–(2.26) необходимо знать всего шесть коэффициентов, которые при решении реальных задач практики могут быть определены из эксперимента.

Автор благодарит академика РАН В.Ф. Журавлева за внимание, проявленное к представленным выше исследованиям.

ЛИТЕРАТУРА

1. Журавлев В.Ф., Киреевков А.А. О разложениях Паде в задаче о двумерном Кулоновом трении. // Известия РАН. Сер.МТТ. – 2005. – №2, – с.3–13.
2. Contensou P. Couplage entre frottement de glissement et frottement de pivotement dans la théorie de la toupie. // Kreiselprobleme Gyrodynamics: IUTAM Symp. Celerina, 1962. Berlin etc., Springer. – 1963. – P.201–216. (Имеется русский перевод: Контенсу П. Связь между трением скольжения и трением верчения и её учет в теории волчка. В сб.: Проблемы гироскопии. – М.: «Мир». – 1967. – С.60–77.)
3. Журавлев В.Ф. О модели сухого трения в задаче качения твердых тел. // ПММ. – 1998. – т.62, №5. – С.762–767.
4. Киреевков А.А. О движении однородного вращающегося диска по плоскости в условиях комбинированного трения. // Известия РАН. Сер.МТТ. – 2002. – №1. – С.60–67.
5. Галин Л.А. Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. – М.: Наука. – 1980.
6. Ишлинский А.Ю., Соколов Б.Н., Черноусько Ф.Л. О движении плоских тел при наличии сухого трения. // Известия РАН. Сер.МТТ. – 1981. – №4. – С.17–28.
7. Leine R.I, Glocker Ch. A Set-valued force law for spatial Coulomb-Contensou friction. // European J. Mech. – 2003. – v.22, No.2. – P.193–216.

8. Киреенков А.А. Метод вычисления силы трения и момента сил трения в комбинированной модели сухого трения для круговых площадок контакта. // Известия РАН. Сер.МТТ. – 2003. – №3.– С.48–53.
9. Журавлев В.Ф. Закономерности трения при комбинации скольжения и вращения. // Изв. РАН, МТТ. – 2003. – №4. – с. 81–88.
10. Журавлев В.Ф., Климов Д.М. О динамике волчка Томсона (тип-топ) на плоскости с реальным сухим трением. // Известия РАН. Сер.МТТ. – 2005. – №6. – С.159–170.
11. Kireenkov A.A. Three-dimensional Model of Combined Dry Friction and Its Application in Non-holonomic Mechanics. // CD Proc. of the 5th EUROMECH Nonlinear Dynamics Conference. Eindhoven, the Netherlands. – 2005. – P.571–577.
12. Kireenkov A.A. About the motion of the symmetric rigid solid alone the plane. // Proc. of the 8th Conf. on Dynamical Systems: Theory and Applications. Lodz, Poland. – 2005. – v.1. – P.95–102.
13. Kireenkov A.A. Influence of the combined dry friction on dynamics of the rectangular plate on a plane. // CD Proc. of the 6th European Solid Mechanics Conference. Budapest, Hungary. – 2006.
14. Svendenius J. Tire models for use in braking application. Licentiate Thesis. Department of Automatic Control, Lund Institute of Technology, Sweden. – 2003. – 95p.
15. Ландау Л.Д., Лифшиц Л.М. Теория упругости. – М.: Наука. – 1965. – 203с.
16. Журавлев В.Ф. Динамика тяжелого однородного шара на шероховатой плоскости. // Известия РАН. Сер. МТТ. – 2006. – №6. – С.3–8.
17. Coulomb Ch.Au. Theory des machines simple. – 1781.