

ОБОБЩЕННЫЕ ПОЛИКОМПОНЕНТНЫЕ МОДЕЛИ ТРЕНИЯ СКОЛЬЖЕНИЯ И ВЕРЧЕНИЯ: ТЕОРИЯ И ЭСПЕРИМЕНТ

Киреев А. А.

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия

1. О моделях трения. Известно, что в случае комбинированной кинематики, когда трущиеся тела участвуют одновременно в движениях скольжения и верчения, применение классического закона Кулона не корректно, а сам закон трения претерпевает существенные изменения. Одна из первых попыток, описать взаимосвязь трения скольжения и верчения в случае неточечного контакта движущихся тел, была предпринята П. Контенсу [1]. Принципиально новое развитие теории было дано В.Ф. Журавлевым в [2]. С помощью переноса центра координат в мгновенный центр скоростей, им были получены точные аналитические выражения главного вектора и момента сил трения для круговых площадок контакта, в предположении, что распределение контактных напряжений в пятне контакта подчиняется закону Герца. Для использований полученных зависимостей в задачах динамики, Журавлев построил их дробно-линейные аппроксимации Паде. Теория В.Ф. Журавлева была применена автором в [3] для исследования динамики тяжелого вращающегося круглого диска, скользящего по шероховатой плоскости, где также были получены как точные выражения для силы и момента сил трения, так и построены соответствующие аппроксимации Паде.

Удобство использования аппроксимаций Паде, позволяющих описывать эффекты комбинированного сухого трения для всего диапазона угловых и линейных скоростей, привело к созданию принципиально новых моделей трения на их основе. Для формализации развиваемой теории, в зависимости от числа кинематических параметров определяющих силовое состояние, в [4] было введено понятие размерности модели сухого трения, а в зависимости от порядка используемых Паде аппроксимаций понятие порядка модели. Например, для круговых площадок контакта с центрально-симметричным распределением контактных напряжений два силовых фактора: сила трения, направленная против скорости скольжения, и момент зависят от двух кинематических факторов: угловой и линейной скоростей – двумерная модель трения верчения и скольжения В.Ф. Журавлева. Если форма пятна контакта отлична от круговой, то, дополнительно, появляется ненулевая компонента силы направленная перпендикулярно к направлению мгновенного проскальзывания и зависимость от угла поворота пятна контакта – трехмерная модель. Окончательная формализация понятия размерности модели поликомпонентного трения была дана В.Ф. Журавлевым в [5].

Двумерные модели трения, разработанные в [2], [3], [4] были построены в предположении справедливости закона Кулона в

дифференциальной форме для маленького элемента площади внутри пятна контакта. Их обобщение на случай использования более реальной характеристики трения было дано автором в [6], где было показано, что, в случае комбинированной кинематики, использование обобщенной дифференциальной формы закона Кулона приводит к качественно новым свойствам зависимости силы трения от скоростей скольжения и верчения, но не изменяет размерность модели. Необходимость использования вместо классического закона Кулона в дифференциальной форме его обобщенных форм была подтверждена многочисленными экспериментами, проведенными на специально разработанной для этих целей установке [7], [8].

Предположение о том, что в случае круговых площадок контакта распределение нормальных напряжений зависит только от радиус-вектора с началом в центре пятна контакта хорошо применимо для моделирования эффектов комбинированного сухого трения, но не позволяет учесть вклад касательных напряжений на распределение нормального давления внутри пятна контакта. В то же время, из работ специалистов в теории упругости [9] известно, что даже чистое скольжение или качение вызывает смещение симметричной диаграммы распределения нормальных контактных напряжений в направлении качения или скольжения. В случае комбинированной кинематики возникает дополнительный перекосяк в направлении перпендикулярном мгновенной скорости скольжения. Нарушение в симметрии распределения нормальных контактных напряжений в случае круговых площадок контакта приводит к появлению составляющей силы трения направленной перпендикулярно к мгновенной скорости скольжения, которая тождественно обращалась в ноль при наличии симметрии. В результате модель трения становится трехмерной: три компоненты силового взаимодействия зависят от трех кинематических параметров.

Еще одним существенным фактом, влияющим на построение модели трения, является динамическая связь компонентов определяющих силовое состояние трущихся тел, возникающая в случае комбинированной кинематики, из-за перекосяка симметричной диаграммы распределения нормальных контактных напряжений. Расчет этой связи для круговых площадок контакта при упрощенных представлениях о равномерности распределения нормального давления внутри пятна контакта был проведен в работе [10]. Аналогичный подход был использован В.Ф. Журавлевым при исследовании явления «шимми» [5].

Предлагаемое ниже обобщение модели трения скольжения и верчения позволяет учесть динамическую связь компонентов определяющих силовое состояние трущихся тел, одновременно принимая во внимание, как представления о распределении нормальных контактных напряжений хорошо согласуемые с результатами в области теории упругости [9], так и обобщенную дифференциальную форму закона Кулона [6].

2. Трехмерная модель трения верчения и скольжения. Динамически связанная модель трения верчения и скольжения для круговых площадок контакта трущихся тел строится в предположении справедливости закона Кулона в обобщенной дифференциальной форме для маленького элемента площади dS внутри пятна контакта, в соответствии с которым дифференциалы главного вектора $d\mathbf{F}$ и момента сил трения $d\mathbf{M}_C$ относительно центра круга контакта определяются формулами [6]:

$$d\mathbf{F} = -f\sigma \frac{\mathbf{V}}{|\mathbf{V}|} (1 + \mu_1 |\mathbf{V}|^3 - \mu_2 |\mathbf{V}|) dS, \quad d\mathbf{M}_C = -f\sigma \frac{\mathbf{r} \times \mathbf{V}}{|\mathbf{V}|} (1 + \mu_1 |\mathbf{V}|^3 - \mu_2 |\mathbf{V}|) dS \quad (1)$$

$$\mathbf{V} = (v - \omega y, \omega x), \quad \mathbf{r} = (x, y), \quad \mathbf{F} = (F_{\parallel}, F_{\perp})$$

где f – коэффициент трения, $\mathbf{r} = (x, y)$ – радиус-вектор, проведенный из центра круга контакта к внутреннему элементу его площади (Рис. 1), ω – угловая скорость вращения центра пятна контакта. Коэффициенты μ_1 и μ_2 в формулах (1), определяют нелинейность дифференциальной характеристики трения. При решении практических задач они могут быть определены из экспериментов.

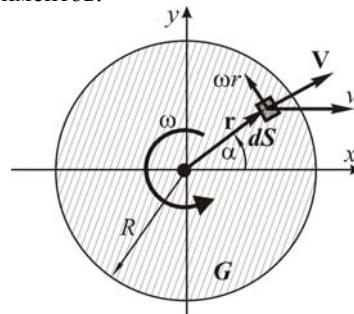


Рис. 1. Кинематика внутри пятна контакта.

Для учета результатов теории упругости [6] предполагается, что в покое распределение нормальных контактных напряжений σ_0 удовлетворяет свойству центральной симметрии: $\sigma_0 = \sigma_0(r)$, $r = |\mathbf{r}|$, а при наличии движения происходит смещение симметричной диаграммы распределений по направлению мгновенной скорости проскальзывания. Эти общие свойства распределений нормальных контактных напряжений позволяют представить соответствующую функцию в виде:

$$\sigma(x, y) = \sigma_0 (1 + k_x x/R) \quad (2)$$

где x – ось прямоугольной системы координат с началом в центре пятна контакта, направленная по направлению мгновенного проскальзывания, а R – радиус пятна контакта. Формально, в разложении (2) следует дописать дополнительный член $k_y y/R$, характеризующий смещение симметричной

диаграммы распределения в перпендикулярном направлении, но вклад этого слагаемого даже при упрощенных представлениях о равномерности распределении нормальных контактных напряжений [10] мал, поэтому, чтобы излишне не усложняют модель трения, им можно пренебречь.

Коэффициент k_x в формуле (2) определяет нарушение в симметрии распределения нормальных контактных напряжений. Для его вычисления используется равенство моментов сил параллельных плоскости скольжения и моментов сил перпендикулярных ей [10]. Если внешние силы отсутствуют, то коэффициент динамической связи определяется из простого равенства:

$$F_{\square}h = Ns \quad (3)$$

где h – высота центра тяжести движущегося тела относительно плоскости скольжения, N – сила, сдавливающая трущиеся поверхности (нормальная реакция), F_{\square} – величина компоненты силы трения направленной против скорости скольжения, а s – величина смещение центра тяжести пятна контакта по направлению оси x , возникающего из-за перекоса в симметричной диаграмме распределения нормальных контактных напряжений. Смещение центра тяжести пятна контакта рассчитывается по хорошо известной формуле:

$$s = \frac{\iint_G x\sigma(x,y)dxdy}{\iint_G \sigma(x,y)dxdy}, \quad G = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq R^2\} \quad (4)$$

Подстановка выражения (2) в формулу (3) дает, что это смещение центра тяжести пятна контакта определяется третьим моментом распределения нормальных контактных напряжений в состоянии покоя:

$$s = \frac{\pi k_x}{R} \int_0^R \sigma_0(r)r^3 dr \quad (5)$$

Приравнивание величин s , вычисленных по формулам (4)–(5) позволяет вычислить коэффициент k_x в разложении (2), который и определяет динамическую связь компонентов, характеризующих силовое состояние внутри пятна контакта.

Если распределение нормальных напряжений в покое $\sigma_0(r)$ описывается законом Герца или Галина, а также в случае тонкого кольца, коэффициент динамической связи k_x легко вычисляется [11].

Чтобы получить главный вектор и момент сил трения необходимо проинтегрировать соответствующие дифференциалы (1) по пятну контакта. Полученные зависимости образуют точную трехмерную интегральную модель трения скольжения и верчения.

После введения безразмерных переменных: $x = \hat{x}R, y = \hat{y}R$ и $\sigma(\hat{x}, \hat{y}) = \hat{\sigma}(\hat{x}, \hat{y})N/R^2$ полученные интегралы удобно записать в полярной системе координат с началом в центре круга контакта:

$x = r \cos \alpha, y = r \sin \alpha, r \in [0, 1], \alpha \in [0, 2\pi]$ (Рис. 1), в которой модули соответствующих функций имеют вид:

$$\begin{aligned} F_{\square} &= F_0 \int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{(v - ur \sin \alpha) r \sigma_0(r)}{\sqrt{u^2 r^2 + v^2 - 2uvr \sin \alpha}} dr d\alpha + 2\pi f ((\mu_1 v^3 - \mu_2 v) I_1 + 2\mu_1 v u^2 I_3) \\ F_{\perp} &= k_x F_0 \int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{ur^3 \sigma_0(r) \cos^2 \alpha}{\sqrt{u^2 r^2 + v^2 - 2uvr \sin \alpha}} dr d\alpha, \quad u \equiv \omega R, F_0 \equiv fN, M_0 \equiv fNR \quad (6) \\ M_C &= M_0 \int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{(ur^2 - vr \sin \alpha) r \sigma_0(r)}{\sqrt{u^2 r^2 + v^2 - 2uvr \sin \alpha}} dr d\alpha + 2\pi f ((2\mu_1 v^2 - \mu_2) u I_3 + \mu_1 u^3 I_5) \end{aligned}$$

где символ «крышечка» опущен для простоты, а коэффициенты, стоящие перед полиномиальными членами, представляют собой первые моменты распределения нормальных контактных напряжений в отсутствии скольжения: I_1 – момент первого порядка, I_3 – момент третьего порядка, а I_5 – момент пятого порядка:

$$I_1 = \int_0^1 r \sigma_0(r) dr, \quad I_3 = \int_0^1 r^3 \sigma_0(r) dr, \quad I_5 = \int_0^1 r^5 \sigma_0(r) dr$$

Они могут быть вычислены в элементарных функциях для наиболее часто используемых моделей распределения нормальных контактных напряжений [6].

Из-за нарушения в симметрии распределения нормальных контактных напряжений появляется составляющая силы трения F_{\perp} , перпендикулярная к мгновенной скорости проскальзывания. Таким образом, модель трения становится трехмерной. Если $k = 0$, то модель (6) полностью совпадает с обобщенной двумерной моделью, исследованной в [6]. Таким образом, строится последовательное приближение к реальной зависимости трения в условиях комбинированной кинематики, основанное на общих свойствах распределения нормальных контактных напряжений. Получается своеобразная иерархия моделей. Простейшая модель – классический закон Кулона. Двумерная модель Журавлева – минимальная модель, корректно описывающая эффекты сухого трения при одновременном скольжении и верчении. И дальнейшие приближения к реальной ситуации: обобщенная двумерная модель [6] – учет нелинейности дифференциальной формы закона Кулона и трехмерная модель (6) – учет упругих свойств трущихся тел.

Если распределение нормальных напряжений описывается законами Герца или Галина, то интегралы в формулах (6) могут быть вычислены в элементарных функциях, с помощью переноса начала полярной системы координат в мгновенный центр скоростей [6, 11].

Если внешние силы отсутствуют, то коэффициент k_x определяется составляющей силы трения направленной против мгновенной скорости скольжения F_{\square} , полученной из выражений (6) отбрасыванием

полиномиальных членов, т.е. на основании двумерной модели трения В.Ф. Журавлева [5]. Отбрасывание полиномиальных членов обусловлено малостью соответствующих коэффициентов, которые могут быть учтены при дальнейшем уточнении модели. Таким образом, обобщенная трехмерная модель трения скольжения и вращения имеет вид:

$$\begin{aligned}
 F_{\parallel} &= F_0 \int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{(v - ur \sin \alpha) r \sigma_0(r)}{\sqrt{u^2 r^2 + v^2 - 2uvr \sin \alpha}} dr d\alpha + 2\pi f \left((\mu_1 v^3 - \mu_2 v) I_1 + 2\mu_1 v u^2 I_3 \right) \\
 F_{\perp} &= \mu F_0 \int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{(v - ur \sin \alpha) r \sigma_0(r)}{\sqrt{u^2 r^2 + v^2 - 2uvr \sin \alpha}} dr d\alpha + \int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{ur^3 \sigma_0(r) \cos^2 \alpha}{\sqrt{u^2 r^2 + v^2 - 2uvr \sin \alpha}} dr d\alpha \quad (7) \\
 M_C &= M_0 \int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{(ur^2 - vr \sin \alpha) r \sigma_0(r)}{\sqrt{u^2 r^2 + v^2 - 2uvr \sin \alpha}} dr d\alpha + 2\pi f \left((2\mu_1 v^2 - \mu_2) u I_3 + \mu_1 u^3 I_5 \right)
 \end{aligned}$$

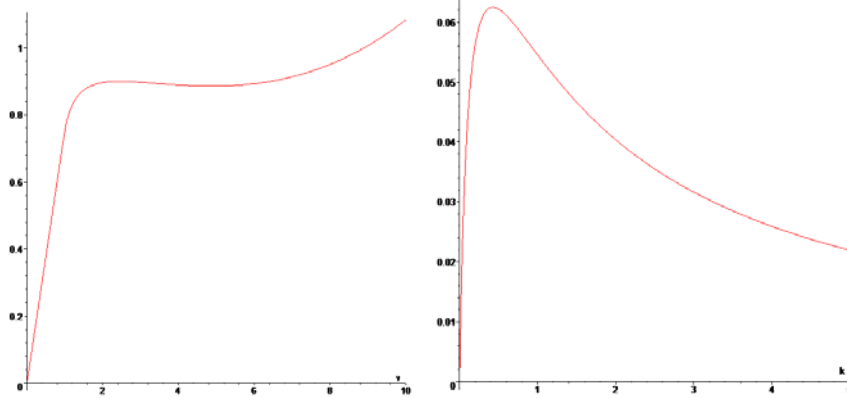


Рис 2. Касательная и нормальная составляющие силы трения.

На рис. 2 представлено типичное поведение нормальной составляющей силы трения (правый картинка) как функции параметра $k = v/u$ и касательной составляющей как функции скорости скольжения v при постоянной скорости вращения u (левая картинка).

Полученные зависимости показывают, что нормальная составляющая силы трения значительно более нелинейная, чем касательная составляющая. Как функция переменных u и v она имеет ряд важных свойств [11]. (Свойства касательной составляющей силы и момента подробно изучены в [6].) Эти свойства позволяют осуществить дальнейшее упрощение модели трения.

Дело в том, что точная трехмерная интегральная модель (7) дает хорошее описание эффектов комбинированного сухого трения, но неудобна при решении задач динамики, так как требуют вычисления кратных интегралов в правых частях дифференциальных уравнений движения. Избежать этой трудоемкой процедуры позволяет замена точных

интегральных выражений соответствующими разложениями Паде. Простейшие из них дробно-линейные дают обобщенную трехмерную модель трения скольжения и вращения первого порядка. При этом из-за сильной нелинейности и самой процедуры построения перпендикулярной составляющей силы трения, соответствующая аппроксимация Паде естественным образом приобретает второй порядок.

$$\begin{aligned}
M_C &= M_0 \left(\frac{u}{u+mv} + 2\pi \left((2\mu_1 v^2 - \mu_2) u I_3 + \mu_4 u^3 I_5 \right) \right), \quad \frac{1}{m} = \frac{v}{M_0} \frac{\partial M_C}{\partial u} \Big|_{u=0} \\
F_{\square} &= F_0 \left(\frac{v}{v+au} + 2\pi \left((\mu_1 v^3 - \mu_2 v) I_1 + 2\mu_4 v u^2 I_3 \right) \right), \quad \frac{1}{a} = \frac{u}{F_0} \frac{\partial F_{\square}}{\partial v} \Big|_{v=0} \\
F_{\perp} &= \frac{\mu F_0 u v}{(u+bv)(v+au)}, \quad \frac{1}{b} = \frac{v}{\mu F_0} \frac{\partial F_{\perp}}{\partial v} \Big|_{v=0}, \quad \mu \equiv \frac{fhR}{\pi I_3}
\end{aligned} \tag{8}$$

Модель первого порядка (8) основанная на дробно-линейных аппроксимациях Паде точной интегральной модели (7) сохраняет значения функций $F_{\square}(u, v)$, $F_{\perp}(u, v)$, $M_C(u, v)$, а также значения их первых производных в нуле и на бесконечности, но не удовлетворяет требованию обращения в нуль остальных первых частных производных. Для более точного сохранения аналитических свойств точной интегральной модели требуется привлечение аппроксимаций Паде, представляющих отношение двух билинейных форм. В результате получается обобщенная трехмерная модель трения второго порядка. При этом порядок аппроксимаций Паде для перпендикулярной составляющей силы трения, как и в случае построения модели первого порядка (8), естественным образом увеличивается.

$$\begin{aligned}
M_C &= M_0 \left(\frac{u^2 + muv}{v^2 + muv + u^2} + 2\pi \left((2\mu_1 v^2 - \mu_2) u I_3 + \mu_4 u^3 I_5 \right) \right), \quad m = \frac{v}{M_0} \frac{\partial M_C}{\partial u} \Big|_{u=0} \\
F_{\square} &= F_0 \left(\frac{v^2 + auv}{v^2 + auv + u^2} + 2\pi \left((\mu_1 v^3 - \mu_2 v) I_1 + 2\mu_4 v u^2 I_3 \right) \right), \quad a = \frac{u}{F_0} \frac{\partial F_{\square}}{\partial v} \Big|_{v=0} \\
F_{\perp} &= \frac{\mu F_0 (u^2 + mu)(v^2 + auv)}{(v^2 + buv + u^2)(v^2 + auv + u^2)}, \quad b = \frac{u}{\mu F_0} \frac{\partial F_{\perp}}{\partial v} \Big|_{v=0}
\end{aligned} \tag{9}$$

Модель второго порядка (9) полностью сохраняет все аналитические свойства точной интегральной модели (7), но, как было показано в [4], для большинства задач динамики достаточно использовать модель первого порядка (8). Модель второго порядка (9) требуется только для более точного анализа, например, для определения границ зоны застоя и времени прекращения движения.

Обобщенные трехмерные модели трения (8)–(9) построены для положительных значений скоростей u и v . Они легко обобщаются на случай произвольных направлений движений формальной их заменой на абсолютные значения в знаменателях соответствующих выражений.

Обобщенные трехмерные модели трения (8)–(9), основанные на разложениях Паде точной интегральной модели (9), сохраняют аналитические свойства точной интегральной модели, как функции кинематических параметров. Их коэффициенты – числа, которые могут быть или вычислены, если можно сделать априорные предположения о распределении нормальных контактных напряжений внутри пятна контакта, или определены из экспериментов. Поэтому модели трения (8)–(9) могут рассматриваться, как феноменологические модели трения, так как они представляют собой аналитические функции, корректно описывающие взаимосвязь компонент определяющих силовое состояние с кинематическими параметрами в условиях комбинированной кинематики, которые можно непосредственно использовать в уравнения динамики.

3. Экспериментальная проверка теоретических результатов. С целью проверки адекватности теоретических моделей в лаборатории механики систем ИПМех РАН в содружестве с кафедрой теоретической механики МФТИ был разработан лабораторный стенд, позволяющий измерять силу сухого трения при прямолинейном проскальзывании трущихся тел при наличии верчения для различных форм областей контакта. Была создана модульная конструкция, позволяющая проводить независимую доработку ее основных блоков дающая возможность проводить эксперименты для широкого диапазона изменения кинематических параметров, определяющих силовое состояние, варьируя приложенную нагрузку в области контакта.

Основными оригинальными элементами лабораторного стенда (рис. 3) являются блок создания движения со скольжением при наличии верчения, блок обеспечения механического контакта, энергетический блок измерительный блок и блок обработки результатов измерения.

Энергетический блок состоит из трехфазного источника питания, переменной частоты и стабилизированного источника постоянного тока.

Блок создания движения представляет собой стальную платформу радиусом 30 см, приводимую во вращение червячным мотор-редуктором, позволяющим изменять обороты платформы от 0 до 180 об./мин.

Блок нормального нагружения представляет собой стальную штангу, перемещающуюся в латунной обойме вдоль радиуса вращающейся платформы. На нижнем конце штанги закрепляются различные контактные элементы – инденторы, позволяющие имитировать различные контактные модели.

На верхнем конце штанги могут устанавливаться различные грузы, обеспечивая различные нормальные нагрузки в области контакта.

Измерительный блок состоит из трех одинаковых тензометрических датчиков. Каждый датчик представляет собой упругую конструкцию – на двух упругих балках, жестко связанных между собой, наклеены тензорезисторы, соединенные в мостовую схему. Схема питается стабилизированным напряжением от энергетического блока. При деформации упругих элементов под действием измеряемых сил с мостовой

схемы снимается напряжение, пропорциональное измеряемой силе. Это напряжение подается на блок обработки результатов измерения, состоящий из цифрового многоканального самописца «S-Recorder-L», выводящего результаты измерений на компьютер.

Измерительный блок крепится в разрез штанги нормального нагружения так, что два тензодатчика крепятся на штанге во взаимно перпендикулярных направлениях и измеряют две компоненты сил сухого трения. Третий датчик регистрирует поворот штанги относительно основания стенда.

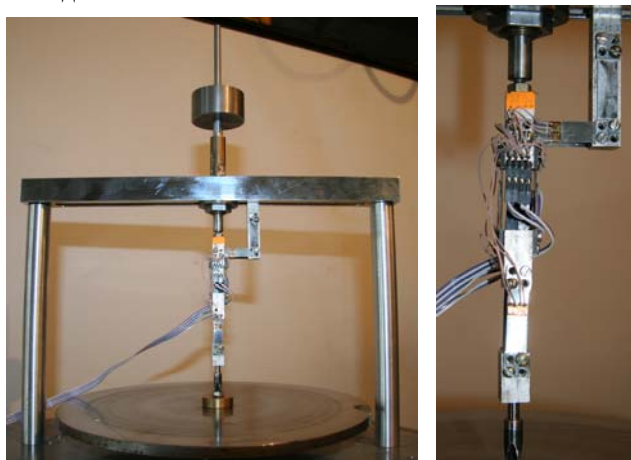


Рис 3. Экспериментальный стенд: основные блоки

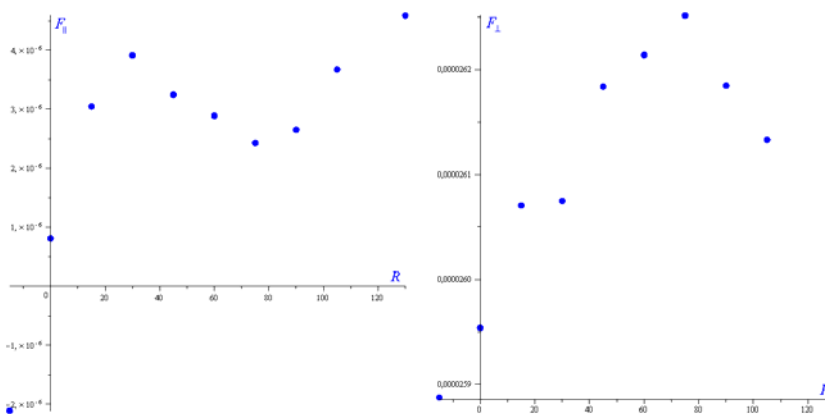


Рис 4. Экспериментально измеренные компоненты силы трения.

Экспериментальное измерение силы трения проводилось для цилиндрического индентора из стали, радиуса 3 см (Рис.4), который последовательно перемещался от центра вращающейся стальной платформы к ее краю.

4. Выводы. Результаты экспериментов подтвердили правильность развиваемой теории поликомпонентного сухого трения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Контенсу П. Связь между трением скольжения и трением верчения и её учет в теории волчка. Пробл. гироскопии. М.: «Мир». 1967. – с.60–77.
2. Журавлев В.Ф. О модели сухого трения в задаче качения твердых тел. // ПММ. – 1998. – т.62, Вып.5. – С.762–767.
3. Киреенков А.А. О движении однородного вращающегося диска по плоскости в условиях комбинированного трения. // Изв. РАН. МТТ. – 2002. – №1. – С.60–67.
4. Журавлёв В.Ф., Киреенков А.А. О разложениях Паде в задаче о двумерном кулоновом трении. // Изв. РАН. Сер.МТТ. – 2005. – №2. – С. 3–13.
5. Андронов В.В., Журавлёв В.Ф. Сухое трение в задачах механики. Москва * Ижевск, R&C Dynamics. 2010. – 185с.
6. Киреенков А.А. Обобщенная двумерная модель трения скольжения и верчения. // Доклады АН. 2010. – т.431. № 4. – С.482–486.
7. Киреенков А.А., Семендяев С.В., Филатов В.Ф. Экспериментальное исследование связанных двумерных моделей трения скольжения и верчения. // Изв. РАН. МТТ. – 2010. – № 6. – С.192–202.
8. Киреенков А.А., Семендяев С.В. Связанные модели трения скольжения и верчения: от теории к эксперименту. // Труды МФТИ. – 2010. – т.2. №3(7). – С.174–181.
9. Горячева И.Г. Механика фрикционного взаимодействия. – М.: Наука, 2001. – 478с.
10. Иванов А.П. Динамически совместная модель контактных напряжений при плоском движении твердого тела. // ПММ. – 2009. – т.73. №2. – С.189–203.
11. Киреенков А.А. Связанная модель трения скольжения и верчения. // Доклады АН. – 2011. – Т.441. №6. – С.1–6.