# АСИМПТОТИЧНІ РОЗВ'ЯЗКИ СИСТЕМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З МАЛИМ ПАРАМЕТРОМ ПРИ ЧАСТИНІ ПОХІДНИХ

*Ключник І.Г., Завізіон Д.Г..*

Кіровоградський державний педагогічний університет імені Володимира Винниченка, Кіровоград, Україна

В [1–9] приводиться огляд літератури і пропонуються методи формального спрощення для сингулярно збуреної лінійної системи диференціальних рівнянь з точкою звороту. В [10] вперше розглянута лінійна система диференціальних рівнянь з малим параметром при частині похідних вигляду

$$y' = A(x)y + A_1(x)y_1$$
$$\varepsilon y'_1 = (B(x) + \varepsilon B_1(x))y_1 + \varepsilon B_2(x)y, \tag{1}$$

де $y \in R^p, y_1 \in R^2$, $A(x)$, $A_1(x)$, $B_1(x)$, $B_2(x)-$ голоморфні при

$$|x| \le x_0 \tag{2}$$

матриці, $B(x)-$ матриця вигляду $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ x & 0 \end{pmatrix}$, $\varepsilon-$ малий додатній параметр. В [7] знайдений розв'язок звичайного диференціального рівняння з матрицею $B(x)$ та побудовані функції $Ai(x)$, причому $B(x)-$ $m \times m-$вимірна матриця, яка має вигляд $B(x) = xI_1 + N, N-$ нільпотентна матриця, $I_1-$матриця з єдиним ненульовим елементом $\{I_1\}_{m1} = 1, m > 2$. В [11] одержано асимптотичний метод інтегрування лінійної системи диференціальних рівнянь вигляду (1) для якої $y \in R^p, y_1 \in R^m, m-$ додатне число, а $B(x)-$ $m \times m-$вимірна матриця рівняння із [7]. Для розглядуваної системи в [11] доведено існування і нескінченну диференційованість по дійсним змінним $x, \varepsilon$ матричних функцій, які мають асимптотичні розвинення при $\varepsilon \to 0$ формальних рядів одержаних запропонованим в [12] асимптотичним методом.

В даній статті одержано асимптотичний метод інтегрування лінійної системи диференціальних рівнянь вигляду (1), для якої $y \in R^p, y_1 \in R^m$, а $B(x)-$ $m \times m-$ вимірна матриця вигляду

$$B(x) = xI_2 + N, \tag{3}$$

де $N-$ нільпотентна матриця, а ненульові елементи матриці $I_2$ визначаються з рівності

$$\{I_2\}_{m1} = 1, \{I_2\}_{m,m-i} = a_{i+1}(x), \{I_2\}_{mm} = 0, i = \overline{1, m-2}.$$

Будемо вважати, що

$$trB_1(x) = trA(x) \equiv 0. \tag{4}$$

За допомогою перетворення $\begin{pmatrix} y \\ y_1 \end{pmatrix} = \Phi(x,\varepsilon)\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ систему (1) приведемо до вигляду

$$u' = C(\varepsilon)v, \tag{5}$$

$$\varepsilon v' = B(x)v + \varepsilon D(\varepsilon)u, \tag{6}$$

де

$$\Phi(x,\varepsilon) = \begin{pmatrix} U(x) + \sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon^n U_n(x) & \sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon^n V_{n1}(x) \\ \sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon^n U_{n1}(x) & V(x) + \sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon^n V_n(x) \end{pmatrix}, \tag{7}$$

$$C(\varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon^n C_n, \quad D(\varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon^n D_n, \tag{8}$$

$C_n, D_n$ – сталі матриці відповідно розмірностей $p\times m, m\times p$ елементи яких є нулі, крім $\{C_n\}_{in} = c_{in}, \{D_n\}_{ni} = d_{ni}, i = \overline{1,p}$, а матриці $U(x), U_n(x)$ – $p\times p$ вимірні, $V(x), V_n(x)$ – $m\times m$ вимірні, $V_{n1}(x), U_{n1}(x)$ – $p\times m, m\times p$ відповідно.

Згідно вигляду рівнянь (1), (5), (6) $\Phi(x,\varepsilon)$ формально задовольняє матричне диференціальне рівняння

$$\varepsilon\Phi' + \Phi\begin{pmatrix} 0 & \varepsilon C(\varepsilon) \\ \varepsilon D(\varepsilon) & B(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon A(x) & \varepsilon A_1(x) \\ \varepsilon B_2(x) & B(x) + \varepsilon B_1(x) \end{pmatrix}\Phi. \tag{9}$$

Підставляючи (7) в (9), одержимо систему рівнянь

$$U'(x) + \sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon^n (U_n'(x) + V_{n1}(x)D(\varepsilon)) = A(x)U(x) +$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon^n (A(x)U_n(x) + A_1(x)U_{n1}(x)),$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon^n V_{n1}'(x) + U(x)C(\varepsilon) + \sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon^n U_n(x)C(\varepsilon) + \sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon^{n-1} V_{n1}(x)B(x) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon^n (A(x)V_{n1}(x) + A_1(x)V_n(x)) + A_1(x)V(x),$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon^n U_{n1}'(x) + V(x)D(\varepsilon) + \sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon^n V_n(x)D(\varepsilon) = B_2(x)U(x) +$$

$$U'_1(x) + V_{11}(x)D_0 = A(x)U_1(x) + A_1(x)U_{11}(x),$$

$$\varepsilon V'(x) + \sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon^{n+1}(V_n'(x)U_{n1}(x)C(\varepsilon)) + \sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon^n V_n(x)B(x) +$$

$$+V(x)B(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon^{n+1}(B_2(x)V_{n1}(x) + B_1(x)V_n(x)) +$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon^n B(x)V_n(x)+\varepsilon B_1(x)V(x)+B(x)V(x). \qquad (10)$$

Зрівнюючи в (10) коефіцієнти при $\varepsilon$ в нульовому степені, одержимо

$$U'(x)=A(x)U(x), \qquad (11)$$

$$U(x)C_0+V_{11}(x)B(x)=A_1(x)V(x), \qquad (12)$$

$$V(x)D_0=B_2(x)U(x)+B(x)U_{11}(x), \qquad (13)$$

$$V(x)B(x)=B(x)V(x). \qquad (14)$$

З (11) і (14) одержимо

$$U(x)=\Omega_0^x(A(x)),$$

$$V(x)=q_{0m}(x)I+\sum_{r=1}^{m-1}q_{0r}(x)B^{m-r}(x), \qquad (15)$$

де $\Omega_0^x(A(x))$ – матрицант рівняння (11), $q_{0i}(x), i=\overline{1,m}$ – довільні голоморфні функції в області (2), $I-$ одинична матриця.

Для визначення $q_{0i}(x), i=\overline{1,m}$ використаємо систему рівнянь, які одержуються з (10) зрівнюючи в ній коефіцієнти при першому степені параметра $\varepsilon$:

$$U'_1(x)+V_{11}(x)D_0=A(x)U_1(x)+A_1(x)U_{11}(x), \qquad (16)$$

$$V'_{11}(x)+U(x)C_1+U_1(x)C_0+V_{21}(x)B(x)=$$
$$=A(x)V_{11}(x)+A_1(x)V_1(x), \qquad (17)$$

$$U'_{11}(x)+V(x)D_1+V_1(x)D_0=$$
$$=B_2(x)U_1(x)+B_1(x)U_{11}(x)+B(x)U_{21}(x), \qquad (18)$$

$$V'(x)+V_1(x)B(x)=B(x)V_1(x)+B_1(x)V(x). \qquad (19)$$

Згідно до лем із [2] для існування розв'язку рівняння (19) необхідно і достатньо виконання наступних умов:

$$tr((V`(x)-B_1(x)V(x))B^k(x))=0, k=\overline{0,m-1}, \qquad (20)$$

де $B^0(x)=I.$

Підставивши в (20) вигляд $V(x), V'(x)$ з (15) і скориставшись згідно [2], співвідношеннями

$$tr((B^{n-r}(x))'B^k(x))=(n-r)tr(B^{n-r-1+k}(x)B'(x)),$$

одержимо

$$q'_{0m}(x)trB^k(x)+\sum_{r=1}^{m-1}q'_{0r}(x)trB^{m-r+k}(x)=q_{0m}tr(B_1(x)B^k(x))+$$
$$+\sum_{r=1}^{m-1}q_{0r}(x)tr(B_1(x)B^{m-r+k}(x))- \qquad (21)$$
$$-\sum_{r=1}^{m-1}(m-r)q_{0r}(x)tr(B^{m-r-1+k}(x)B'(x)),\ r=\overline{1,m},\ \ k=\overline{0,m-1}.$$

Умови (21) запишемо у вигляді матричного рівняння

$$S(x)q'_0(x) = T(x)q_0(x), \tag{22}$$

де $q_0(x) - m -$ вимірний вектор з елементами $q_{0i}(x), i = \overline{1,m},$

$$T(x) = T_1(x) + T_2(x),$$

елементи матриць $T_1(x), T_2(x), S(x)$ визначаються за формулами

$$\{T_1(x)\}_{kr} = -(m-r)tr(B^{m-r-2+k}(x)B'(x)),$$
$$\{T_2(x)\}_{kr} = tr(B_1(x)B^{m-1-r+k}(x)), \tag{23}$$
$$\{S(x)\}_{kr} = tr(B^{m-r+k-1}(x)), \quad k = \overline{1,m}, \quad r = \overline{1,m}.$$

Помноживши рівняння (22) зліва на матрицю $D_1(x)$

$$D_1(x) = xI_1 + N, \tag{24}$$

одержимо систему

$$D_1(x)S(x)q'_0(x) = D_1(x)T(x)q_0(x), \tag{25}$$

в якій матриці $D_1(x)S(x)$ і $D_1(x)T(x)$ при $x \to 0$ мають поведінку

$$D_1(x)S(x) = xK(I + O(x)), \tag{26}$$
$$D_1(x)T(x) = D_1(0)T(0) + O(x),$$

де $K, D_1(0)T(0) - (m \times m) -$ верхньотрикутні матриці, елементи яких визначаються за формулами

$$\{K\}_{1m} = 0, \{K\}_{jj} = m, \{K\}_{i,m-k+i} = ka_k(0),$$
$$\{D_1(0)T(0)\}_{i,m-k+i} = (k-i)a_k(0) + tr(B_1(0)B^k(0)),$$
$$\{D_1(0)T(0)\}_{jj} = m - j, j = \overline{1,m}, i = \overline{1,m-1}, k = \overline{1,m-1}.$$

Враховуючи (26), систему (25) перепишемо у вигляді

$$xq'_0(x) = H(x)q_0, \tag{27}$$

де

$$H(x) = K^{-1}D_1(0)T(0) + O(x). \tag{28}$$

З (28) і явного вигляду $K^{-1}D_1(0)T(0)$ випливає, що матриця $H(0)$ має власні значення $\lambda_i = -\dfrac{m-i}{m}, i = \overline{1,m}.$ Тоді з [1] випливає, що система (27) має ненульовий голоморфний в області (2) розв'язок $q_0(x)$ такий, що $q_{0m}(0) = 1.$ Підставивши знайдені функції $U(x)$ і $V(x)$ в (12), (13) одержимо рівняння для визначення $C_0, D_0, U_{11}(x), V_{11}(x).$ Помноживши (12) справа на матрицю $B^{m-1}(x)$, а (13) зліва на $B^{m-1}(x)$ одержимо рівняння

$$U(x)C_0B^{m-1}(x) + V_{11}(x)B^m(x) = A_1(x)V(x)B^{m-1}(x), \tag{29}$$
$$B^{m-1}(x)V(x)D_0 = B^{m-1}(x)B_2(x)U(x) + B^m(x)U_{11}(x). \tag{30}$$

При $x = 0$ із (29), (30) одержимо рівняння для визначення матриць $C_0, D_0$:

$$U(0)C_0B^{m-1}(0) = A_1(0)V(0)B^{m-1}(0), \tag{31}$$

$$B^{m-1}(0)V(0)D_0 = B^{m-1}(0)B_2(0)U(0). \tag{32}$$

З рівнянь (31), (32) знайдемо:

$$\{C_0\}_{i1} = \{A_1(0)V(0)\}_{i1}, \{C_0\}_{ij} = 0, \{D_0\}_{mi} = \{B_2(0)U(0)\}_{mi},$$

$$\{D_0\}_{si} = 0, i = \overline{1,p}, j = \overline{2,m}, s = \overline{1,m-1}.$$

Враховуючи (31), (32) для визначення матриць $V_{11}(x), U_{11}(x)$ з (29), (30) отримаємо рівняння вигляду

$$xV_{11}(x) = F(x),$$

$$xU_{11}(x) = G(x), \tag{33}$$

де $F(x), G(x)$ – відомі матриці.

В силу вибору $C_0, D_0$ маємо $F(0) = 0, G(0) = 0,$ тоді

$$F(x) = x\int_0^1 F'_x(tx)dt,$$

$$G(x) = x\int_0^1 G'_x(tx)dt. \tag{34}$$

З врахуванням (33), (34) для $V_{11}(x), U_{11}(x)$ знайдемо значення

$$V_{11}(x) = \int_0^1 F'_x(tx)dt,$$

$$U_{11}(x) = \int_0^1 G'_x(tx)dt, \tag{35}$$

які визначають голоморфні в області (2) розв'язки рівнянь (33). Отже знайдені коефіцієнти розвинень (7), (8) при $\varepsilon$ в нульовому степені маємо систему рівнянь (16)–(19). Поклавши $U_{11}(0) = 0$ з рівняння (16) однозначно знаходимо $U_1(x)$ а загальний розв'язок рівняння (19) визначається за формулою

$$V_1(x) = q_{1m}(x)I + \sum_{r=1}^{m-1} q_{1r}(x)B^{m-r}(x) + W_1(x), \tag{36}$$

де $W_1(x)$ – частинний розв'язок рівняння (19). Згідно [2] умови існування розв'язку рівняння, що одержується при прирівнюванні коефіцієнтів при $\varepsilon$ у другому степені в останньому рівнянні (10), наступні

$$tr((B_1(x)V_1(x) - V'_1(x) + F_1(x))B^k(x)) \equiv 0, k = \overline{0,m-1}, \tag{37}$$

де $F_1(x) = B_2(x)V_{11}(x) - U_{11}(x)C_0$.

Підставивши (36) в (37) одержимо систему рівнянь для визначення $q_{1i}(x), i = \overline{1,m}$

$$S(x)q'_1(x) = T(x)q_1(x) + f(x), \tag{38}$$

де $q_1(x) - m-$ вимірний вектор з компонентами $q_{1i}(x)$,

$$\{f(x)\}_i = tr((B_1(x)W_1(x) + F_1(x) - W'_1(x))B^{i-1}(x)), i = \overline{1,m}.$$

Помноживши (38) зліва на матрицю $D_1(x)$ маємо

$$xq'_1(x) = H(x)q_1(x) + \tilde{F}_1(x), \tag{39}$$

де $\tilde{F}_1(x)$ згідно (26) при $x \to 0$ має поведінку

$$\tilde{F}_1(x) = (I + O(x))K^{-1}D_1(x)f(x).$$

Система (39) в області (2) має голоморфний розв'язок $q_1(x)$ такий, що $q_{1i}(0) = 0, i = \overline{1,m}.$ Матриці $V_{21}(x), U_{21}(x), C_1, D_1$ однозначно знаходяться з рівнянь (17), (18). Можна довести, що вказаним алгоритмом однозначно знаходяться довільні коефіцієнти розвинень (7), (8) і коефіцієнти розвинень є голоморфними функціями в області (2).

Матриця (7) при $\varepsilon = 0$ має вигляд $\Phi(x,0) = \begin{pmatrix} U(x) & 0 \\ 0 & V(x) \end{pmatrix}$, де $U(x), V(x)$ визначаються за формулами (15). З умови (4) випливає, що $\det U(x) \equiv 1.$ Згідно вибору розв'язку $q_0(x)$ системи рівнянь (32) маємо $V(0) = 1,$ а значить існує $x_1 \le x_0$ такий, що $\det V(x) \ne 0$ для $|x| \le x_1$. Отже $\det\Phi(x,0) \ne 0$ для $|x| \le x_1$.

Методом із [10] можна довести, що за допомогою заміни $u = V(\varepsilon)w$ система (5), (6) зводиться до вигляду

$$w'_1 = c_1(\varepsilon)v_1, w'_1 = 0, i = \overline{2,p}, \tag{40}$$

$$\varepsilon v' = B(x)v + \varepsilon D_1(\varepsilon)w, \tag{41}$$

де $v = (v_1,...v_m) - m-$ вимірний вектор; $c_s = \{C(\varepsilon)\}_{s1}$, $s = \overline{1,p}$; $V(\varepsilon) - p \times p-$ матриця з діагональними елементами рівними одиниці, в якої $\{V(\varepsilon)\}_{i1} = \dfrac{c_i(\varepsilon)}{c_1(\varepsilon)}, i = \overline{2,p},$ при умові, що $c_1(\varepsilon) \ne 0,$ а інші елементи рівні нулю; $D_1(\varepsilon) = D(\varepsilon)V(\varepsilon) = \begin{pmatrix} 0 \\ d_1(\varepsilon) \end{pmatrix}.$ Таким чином доведена наступна теорема.

**Теорема.** *Нехай матриці системи рівнянь (1) голоморфні в області (2). Тоді існують формальні ряди (7), (8), коефіцієнти яких голоморфні в області (2) такі, що* $\det\Phi(x,0) \ne 0$ *при* $|x| \le x_1 < x_0$ *і формальне перетворення з матрицею заміни (7) приводить систему (1) до системи (40), (41).*

З рівняння (40) маємо

$$w_1 = w_1^0 + c_1(\varepsilon)\int_0^x v_1(t)dt, w_j = w_j^0, j = \overline{2,p}, \quad (42)$$

де $w_i^0, i = \overline{1,p}$ – довільні сталі. Підставляючи (42) в (41) одержимо систему рівнянь для $v$, яка приводить до одного рівняння $m$-го порядку

$$\varepsilon^m v_1^{(m)} = a_m(x)xv_1 + \varepsilon a_{m-1}(x)xv_1' + \varepsilon^2 a_{m-2}(x)xv_1'' + ... + \quad (43)$$

$$+\varepsilon^{m-3}a_3(x)xv_1^{(m-3)} + \varepsilon^{m-2}a_2(x)xv_1^{(m-2)} + \varepsilon c_0 + \varepsilon\alpha\int_0^x v_1(t)dt,$$

де $c_0 = d_1(\varepsilon)w_0, d_1(\varepsilon) = (d_{11}(\varepsilon),...d_{1p}(\varepsilon)), \alpha = d_{11}(\varepsilon)c_1(\varepsilon), v_i = \varepsilon v_{i-1}', \ i = \overline{2,m}.$

Взявши $v_1(x)$ у вигляді степеневого ряду по $x$, можна знайти загальний розв’язок рівняння (43).

## ЛІТЕРАТУРА


1. Вазов В. Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений.– М.:Мир, 1968. – 464с.
2. Wasow W. Linear turning point theory. – Springer – Verlag New York Ins., 1985. – 243 p
3. Lee R.Y. On uniform simplification of linear differential equation in a full neighborhood of a turning point // J. Math. Anal. and Appl. – 1969. – v.27. – P. 501 – 510.
4. Hanson R.J. Reduction theorems for systems of ordinary differential equations with a turning point // J. Math. Anal. And Appl. – 1966. – v.16. – P. 280 – 301.
5. Hanson R.J., Russell D.L. Classification and reduction of second order systems at a turning point // J. Math. and Phys. – 1967. – v.46. – P.74 – 92.
6. Sibuya Y. Uniform simplification in a full neighborhood of a transition point // Memoirs of the Amer. Math. Soc. – 1974. – v.149. – P. 3 – 106.
7. Kohno M., Ohkohchi S., Kohmoto T. On full uniform simplification of even order linear differential equations with a parameter // Hiroshima Math. J. – 1979. – v.9. – P. 747 – 767.
8. Nishimoto T. On an extension theorem and its application for turning point problems of large order // Kodai Math. Sem. Rep. – 1973. – v.25. – P. 458 – 489.
9. Turritin H.L. Stokes multipliers for asymptotic solutions of a central differential equation // Trans. Am: Math. Soc. – 1950. – v.68. – P. 304 – 329.
10. Самойленко А.М. Об асимптотическом интегрировании одной системы линейных дифференциальных уравнений с малым параметром при части производных // Укр. мат. журн. – 2002. – т.54, № 11. – С. 1505–1516.
11. Ключник І.Г. Лінійна система диференціальних рівнянь з точкою звороту // Укр. мат. журн. – 2010. – т.62, № 5. – С. 625 – 642.
12. Ключник І.Г. Асимптотичні розв'язки лінійної системи з малим параметром при частині похідних // Нелінійні коливання. – 2010. – т.13, № 1. – С.30 – 38.