МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ ТЕОРИИ УПРАВЛЕНИЯ

Коробов В.И.

Харьковский национальный университет имени В.Н. Каразина,
пл. Свободы, 4, 61022, Харьков, Украина
Uniwersytet Szczecinski, Instytut Matematyki,
ul. Wielkopolska 15, 70451 Szczecin, Poland

1. Введение

Математическая теория управления начала интенсивно развиваться в 50-х – 60-х годах XX столетия. Ее возникновение было связано с необходимостью решать новые на то время задачи, прежде всего, задачи управления механическими объектами, движение которых описывается дифференциальными уравнениями. Значительный вклад в ее создание внесли Л.С. Понтрягин, В.Г. Болтянский, Р.В. Гамкрелидзе, Е.Ф. Мищенко, Р. Калман, Р. Беллман и многие другие.

Льву Семёновичу Понтрягину — автору ряда выдающихся мировых открытий, исполнилось в этом году 100 лет со дня рождения (3 сентября 1908 г. — 3 мая 1988 г.). В топологии он открыл общий закон двойственности и в связи с этим построил теорию характеров непрерывных групп; получил ряд результатов в теории гомотопий (классы Понтрягина). В теории колебаний главные результаты относятся к асимптотике релаксационных колебаний.

В теории управления Л.С. Понтрягин является создателем математической теории оптимальных процессов, в основе которой лежит так называемый принцип максимума Понтрягина. Работы школы Понтрягина оказали большое влияние на развитие теории управления и вариационного исчисления во всем мире.

Принцип максимума [1] послужил основой математической теории управляемых процессов. Дальнейшее развитие теории управления связано как с прикладными задачами (управление летающими объектами, в том числе космическими аппаратами, управление технологическими и экономическими процессами, и др.), так и с исследованием задач управления как чисто математических. Так возникли и сформировались такие направления в математической теории управления как управляемость, наблюдаемость, идентификация систем, теория оптимального управления, синтез управления для различных типов систем (обыкновенных дифференциальных, с распределенными параметрами, интегро-дифференциальных, стохастических, с запаздыванием) и другие.

Отметим, что одной из работ, опубликованных еще до становления теории управления, была работа [2] Дмитрия Евгеньевича Охоцимского — советского ученого, создателя научной школы в области динамики космического полета, автора фундаментальных трудов в области прикладной небесной механики, робототехники, в которой был рассмотрены задачи: как достичь конечной цели при минимальных затратах топлива; как управлять расходом топлива для достижения максимальной высоты.

Открытие принципа максимума явилось основой математической теории управления [1]. В [1] поставлена проблема оптимального синтеза, т.е. нахождение управления в позиционном виде $u = u(x)$, удовлетворяющего заданному ограничению $u \in \Omega$, переводящего произвольную начальную точку x_0 в заданную точку x_1 по траектории системы $\dot{x} = f(x, u(x))$ с наименьшим значением рассматриваемого функционала $\int\limits_0^T f_0(x,u)dt$.

Одной из наиболее естественных проблем является нахождение позиционного управления, обеспечивающего переход в заданное состояние за минимальное время (синтез управления $u(x)$, оптимального по быстродействию). В этом случае $f_0(x,u) \equiv 1$.

Принцип максимума Понтрягина заключается в следующем. Пусть движение объекта описывается системой равенств

$$\dot{x} = f(x,u), \quad x(0) = 0, \tag{1}$$

где вектор u — параметр, называемый управлением. Вектор управления u может быть выбран функцией времени, т.е. $u = u(t)$, из некоторого допустимого класса функций. Таким образом, система равенств (1) принимает вид

$$\dot{x} = f(x, u(t)), \quad x(0) = 0, \tag{2}$$

где $u(t)$ есть конкретно осуществляемое в течение времени управление объектом. Задача (2) представляет собой задачу Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений, для которой уже можно находить решение. Отметим, что величины u_1, u_2, $\ldots$, u_r, не могут быть произвольными. Так, если речь идет об управляемом движении ракеты, а u_1 есть величина тяги двигателя, то она может меняться лишь в некоторых пределах от 0 до некоторой величины a: $0 \le u_1 \le a$. Аналогичные ограничения возникают и для других компонент вектора u. Следовательно, управление u должно удовлетворять некоторым заданным ограничениям, которые представляют собой некоторое множество Ω, т.е. $u \in \Omega \subset \mathbb{R}^r$. Наиболее интересным случаем является случай замкнутого множества Ω.

Сформулируем принцип максимума (необходимое условие оптимальности) для задачи быстродействия. В более общем случае он формулируется подобным образом. Рассмотрим вектор $\psi = (\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n)$ и составим вспомогательную функцию Гамильтона

$$H(\psi, x, u) = \psi_1 f_1(x,u) + \psi_2 f_2(x,u) + \ldots + \psi_n f_n(x,u).$$

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x}_i = \partial H(\psi, x, u)/\partial \psi_i, & i = 1, \ldots, n, \\ \dot{\psi}_i = -\partial H(\psi, x, u)/\partial x_i, & i = 1, \ldots, n, \end{cases}$$

которая в векторной форме записи имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x} = \partial H(\psi, x, u)/\partial \psi, \\ \dot{\psi} = -\partial H(\psi, x, u)/\partial x. \end{cases} \tag{3}$$

Полученная система дифференциальных уравнений (3) состоит из $2n$ уравнений, в которые входят $2n{+}r$ неизвестных функций x_1, x_2, $\ldots$, x_n, ψ_1, ψ_2, $\ldots$, ψ_n, u_1, u_2, $\ldots$, u_r, поэтому требуется иметь еще r условий. Эти недостающие r условий получаем путем выбора вектора u. А именно, управляющий вектор u выбирается таким, чтобы при любых фиксированных значениях ψ и x функция $H(\psi, x, u)$ достигала своего максимума при этом значении u. Система уравнений (3) вместе с этими условиями представляет собой необходимые условия оптимального по быстродействию решения задачи. В случае линейной системы оно является и достаточным.

В случае, когда на управление u нет ограничений, т. е. $\Omega = \mathbb{R}^r$, то условие максимальности функции $H(\psi, x, u)$ по переменному u превращается в выполнение r соотношений $\partial H(\psi, x, u)/\partial u_j = 0$, $j = 1, 2, \ldots, r$.

Принцип максимума, положивший начало математической теории управления, стал универсальным методом для решения задач оптимизации, нашёл многочисленные применения в различных областях науки и техники и оказал существенное влияние на их развитие.

3. Аналитическое решение задачи быстродействия

Из принципа максимума следует, что для линейных систем управление принимает граничные значения из множества ограничений на управление в случае ограниченного множества Ω. Этого достаточно в случае управляемых систем второго порядка [1]. Но для систем более высокого порядка требуются дополнительные условия. Поэтому потребовались дальнейшие исследования для нахождения оптимального по быстродействию управления.

Н.Н. Красовский предложил [3] свести решение задачи линейного быстродействия к абстрактной проблеме моментов — L-проблеме моментов: определить линейный функционал, принимающий на заданных n элементах заданные значения и имеющий наименьшую норму (управление), т.е для заданных x_1, $\ldots$, x_n из банахового пространства $\mathbb{X}$ и чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ построить линейный непрерывный функционал f такой, что $f(x_i) = \alpha_i$, $i = 1, \ldots, n$, $\|f\| \le L$. В случае минимизации нормы пространства $\mathbb{L}_2$ получено алгебраическое уравнение для определения времени быстродействия. В случае ограничения на управления вида $|u(t)| \le 1$ для решения задачи быстродействия предложены численные методы, основанные на минимизации некоторой функции с ограничениями на переменные.

Аналитическое решение проблемы быстродействия с ограничением вида $|u(t)| \le L$ потребовало развития другой классической области математики — проблемы моментов А.А. Маркова.

Из истории развития проблемы моментов. Классическую проблему моментов впервые поставил П.Л. Чебышев в работе [4]. Она состоит в следующем. Даны равенства

$$\int_a^b u(t)dt = s_1,\ \int_a^b tu(t)dt = s_2, \dots, \int_a^b t^{n-1}u(t)dt = s_n,$$

где $s_1, \dots, s_n$ заданные числа. Требуется определить предельные величины интеграла $\int\limits_a^b u(t)dt$.

Чебышев дал механическую интерпретацию этой задачи: дана длина, вес, место центра тяжести и момент инерции материальной прямой линии с неизвестной плотностью, изменяющейся при переходе от одной точки к другой. Требуется найти наиболее тесные пределы для веса отрезка $[a, b]$ этой прямой.

В 1894 году Т. Стилтьесом в [5] была поставлена и решена следующая проблема моментов. Найти функцию $\sigma(t)$, $t \in [0, \infty)$ – распределение положительной массы, такую, что

$$\int\limits_0^\infty d\sigma(t) = s_1,\ \int\limits_0^\infty td\sigma(t) = s_2,\ \int\limits_0^\infty td\sigma(t) = s_3,\ \int\limits_0^\infty t^k d\sigma(t) = s_{k+1},\ k = 3, \dots,$$

где заданы: s_1 — масса прямой, s_2 — статический момент, s_3 — момент инерции, s_{k+1}, $k = 3, \dots,$ — обобщенные моменты (моменты относительно точки 0).

В 1921 году Г. Гамбургером решена [6] проблема моментов вида: найти неубывающую функцию $\sigma(t)$, $t \in (-\infty, \infty)$, такую, что

$$\int\limits_{-\infty}^\infty t^k d\sigma(t) = s_{k+1}, \quad k = 0, 1, \dots,$$

где $s_1, \dots$ заданные числа, разрешимость которой состоит в позитивности последовательности $\{s_k\}_{k=1}^\infty$.

Степенная проблема моментов в случае конечного интервала, т.е.

$$\int\limits_a^b t^k d\sigma(t) = s_{k+1}, \quad k = 0, 1, \dots,$$

называется проблемой моментов Хаусдорфа. В 1923 году она была решена Хаусдорфом [7].

Аналитическое решение задачи быстродействия было получено В. И. Коробовым и Г. М. Скляром в работах [8]–[14], которое основано на ими поставленной min-проблеме моментов, являющейся развитием классической проблемы моментов А.А. Маркова.

Классическая проблема моментов А.А. Маркова (1884 г.), исследования которой приведены в работах [15]–[19], формулируется следующим образом. Для заданной последовательности непрерывных на $[a, b]$ функций $\{g_k(t)\}_{k=1}^n$

1) найти условия, которым должен удовлетворять вещественный вектор $s = (s_1, s_2, \ldots, s_n) \in \mathbb{R}^n$, если известно, что существует хотя бы одна измеримая функция $u(t)$, $t \in [a, b]$, такая, что

$$\int_a^b g_k(t)u(t)dt = s_k,\ k = 1, \ldots, n, \quad |u(t)| \leq L,\ \ t \in [a, b];$$

2) для заданного вектора $s \in S[a, b]$, где множество $S[a, b]$ — область разрешимости проблемы моментов, определить некоторые простейшие такие функции $u(t)$.

В случае, когда функции $g_k(t) = t^k$, проблема моментов А.А. Маркова

$$\int_a^b t^k u(t)dt = s_{k+1}, \quad |u(t)| \leq L,$$

называется степенной, причем при $k = 0, 1, \ldots, n-1$ она называется усеченной, а при $k = 0, 1, \ldots$ — бесконечной.

В случае, когда $g_k(t) = e^{ikt}$, проблема моментов А.А. Маркова

$$\int_a^b e^{ikt} u(t)dt = s_{k+1}, \quad |u(t)| \leq L,$$

называется тригонометрической проблемой моментов А.А. Маркова.

Условия разрешимости степенной и тригонометрической проблем моментов А.А. Маркова формулируются в терминах неотрицательности квадратичных форм с коэффициентами s_k.

Проблема моментов Маркова после его работ достаточно долго не исследовалась. Интерес к ней возобновился с 1935 года, благодаря работам Н.И. Ахиезера и М.Г. Крейна [18].

Рассмотрим сведение задачи быстродействия для линейной системы

$$\dot{x} = A(t)x + b(t)u, \quad x \in \mathbb{R}^n,\ u \in \Omega \subset \mathbb{R},$$

где $A(t)$ — $(n \times n)$-матрица, $b(t)$ — n-мерный вектор, $\Omega = \{u : |u| \leq 1\}$, к min-проблеме моментов А.А. Маркова. Предположим, что управление $u = u(t)$ переводит систему из некоторого начального состояния $x(0) = x^0$ в конечное состояние $x(T) = 0$. Пусть $\Phi(t)$ — фундаментальная матрица уравнения $\dot{x} = A(t)x$, такая, что $\Phi(0) = I$. Тогда по формуле Коши имеем

$$x(T) = 0 = \Phi(T)x^0 + \Phi(T)\int_0^T \Phi^{-1}(t)b(t)u(t)dt.$$

Следовательно, функция $u(t)$ удовлетворяет следующим моментным равенствам

$$x_k^0 = \int_0^T g_k(t)u(t)dt, \quad k = 1, \dots, n,$$

где $g(t) = (g_1(t), \dots, g_n(t)) = -\Phi^{-1}(t)b(t)$. Если управление удовлетворяет условию $|u(t)| \leq 1$, то мы приходим к проблеме моментов Маркова

$$s_k = \int_0^T g_k(t)u(t)dt, \quad k = 1, \dots, n, \ u(t) \in [-1, 1].$$

С точки зрения теории управления естественно рассмотреть задачу на минимально возможном отрезке времени. Это и будет временем быстродействия. Постановка проблемы моментов Маркова на минимально возможном отрезке (min-проблема моментов Маркова) состоит в следующем: для заданной последовательности функций $\{g_k(t)\}_{k=1}^n$, $t \in [0, T]$, и вектора $s \in \mathbb{R}^n$ найти минимально возможный интервал $[0, \theta_s] \subset [0, T]$, такой, что для $\theta = \theta_s$ имеет место следующее представление

$$s_k = \int_0^\theta g_k(t)u(t)dt, \ k = 1, \dots, n, \ \ |u(t)| \leq 1, \tag{4}$$

и найти функцию $u(t) = u_s(t)$, отвечающую этому представлению. Пара $(\theta_s, u_s(t))$ называется решением min-проблемы моментов (4). Таким образом, θ_s является оптимальным временем, а функция $u_s(t)$ — оптимальным управлением.

Задача быстродействия для канонической системы

$$\begin{aligned} &\dot{x}_1 = u, \quad \dot{x}_k = x_{k-1}, \quad k = 2, \dots, n, \\ &x(0) = x^0, \quad x(\theta) = 0, \quad |u(t)| \leq 1, \quad \theta \to \min, \end{aligned} \tag{5}$$

где $x_k^0 = (-1)^k s_k/(k-1)!$, сводится к min-проблеме моментов Маркова (4), где $g_k(t) = t^{k-1}$, $k = 1, \dots, n$, т. е. к степенной min-проблеме моментов Маркова

$$s_k = \int_0^\theta t^{k-1}u(t)dt, \quad k = 1, \dots, n, \quad |u(t)| \leq 1, \quad \theta \to \min. \tag{6}$$

А задача быстродействия для системы

$$\begin{aligned} &\dot{x}_0 = u, \ \dot{x}_{2k-1} = -kx_{2k}, \ \dot{x}_{2k} = kx_{2k-1} + u, \ k = 1, \dots, p, \\ &x(0) = x^0, \quad x(\theta) = 0, \quad |u(t)| \leq 1, \end{aligned}$$

сводится к решению тригонометрической min-проблемы моментов Маркова

$$\int_0^\theta e^{-ikt}u(t)dt = x_k^0, \ \ k = 0, \dots, p, \quad |u(t)| \leq 1, \quad \theta \to \min.$$

Проводя аналогию с представлением функции в виде ряда, можно отметить, что степенная min-проблема моментов играет такую же роль, как и ряд Тейлора, а тригонометрическая — как и ряд Фурье. Это значит, что решение задачи быстродействия для других систем может быть сведено к решению этой задачи для приведенных систем.

Пусть $(\theta_s, u_s(t))$ является решением задачи (6). Тогда $u_s(t)$ принимает значения ± 1 и имеет не более, чем $n-1$ точек переключения. Предположим, что $u_s(t)$ имеет $n-1$ точек переключения, которые обозначим через $0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < \theta_s$. Тогда из (6) получаем

$$\sum_{j=1}^{n-1} (-1)^{n-j+1} t_j^k = c_k^{\pm}(\theta_s, s), \ k = 1, \ldots, n,$$

где $c_k^{\pm}(\theta, s) = \frac{1}{2}(\theta^k \mp k s_k)$ и знак в верхнем индексе c_k соответствует знаку $u_s(t)$ на последнем интервале времени.

Вначале рассмотрим случай $n = 2m + 1$. Рассмотрим рациональную функцию

$$R(z) = \frac{\prod\limits_{j=1}^{m} (z - t_{2j})}{\prod\limits_{j=1}^{m} (z - t_{2j-1})} = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\gamma_k}{z^k},$$

являющуюся аналитической при достаточно больших значениях $|z|$. Эта функция имеет m корней и m полюсов, перемежающихся на $(0, \theta_s)$. Поэтому для элементов γ_k определителя $\Gamma_{p,q}$ ганкелевой матрицы

$$\Gamma_{p,q} = \det \begin{pmatrix} \gamma_p & \gamma_{p+1} & \cdots & \gamma_q \\ \gamma_{p+1} & \gamma_{p+2} & \cdots & \gamma_{q+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \gamma_q & \gamma_{q+1} & \cdots & \gamma_{2q-p} \end{pmatrix}$$

справедливы следующие свойства: $\Gamma_{1,m+1} = 0$ и, более того, $\Gamma_{1,p} > 0$, $\Gamma_{2,p+1} > 0$ для $p = 1, \ldots, m$.

Так как

$$\ln R(z) = \sum_{j=1}^{m} \ln\left(1 - \frac{t_{2j}}{z}\right) - \sum_{j=1}^{m} \ln\left(1 - \frac{t_{2j-1}}{z}\right) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k z^k} \sum_{j=1}^{2m} (-1)^j t_j^k,$$

то

$$\ln R(z) = -\frac{c_1^{\pm}(\theta_s, s)}{z} - \cdots - \frac{c_n^{\pm}(\theta_s, s)}{n z^n} + O(\frac{1}{z^{n+1}}).$$

Из этих равенств $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ выражаются через $c_k = c_k^{\pm}(\theta_s, s)$, $k = 1, \ldots, n$, по формуле

$$\gamma_k = \frac{(-1)^{k-1}}{k!} \det \begin{pmatrix} c_1 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ c_2 & c_1 & 2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \\ c_{k-1} & c_{k-2} & \ldots & c_1 & k-1 \\ c_k & c_{k-1} & \ldots & c_2 & c_1 \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Поскольку $c_1^{\pm}(\theta,s)$, $\ldots$, $c_n^{\pm}(\theta,s)$ определяются следующими равенствами

$$c_k^{\pm}(\theta,s)=\frac{1}{2}(\theta^k\mp ks_k),\quad k=1,\ldots,n,$$

то из (7) следует, что $\gamma_k^{\pm}=\gamma_k^{\pm}(\theta)$ являются полиномами переменной θ и степень $\gamma_k^{\pm}(\theta)$ равна k. Левые части уравнений $\Gamma_{1,m+1}^{\pm}=\Gamma_{1,m+1}^{\pm}(\theta)=0$ для определения θ_s также являются полиномами переменной θ степени $(m+1)^2$, а θ_s является одним из корней этих уравнений.

Случай $n=2m$ исследуется при рассмотрении функции

$$R(z)=\frac{\prod\limits_{j=1}^{m}(z-t_{2j-1})}{z\prod\limits_{j=1}^{m-1}(z-t_{2j})}=1-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\gamma_k}{z^k};$$

что приводит к уравнениям $\Gamma_{2,m+1}^{\pm}=\Gamma_{2,m+1}^{\pm}(\theta)=0$. Аналогичные соотношения получаем и для управления $u_s(t)$, имеющего менее, чем $n-1$ точек переключения.

Полное решение min-проблемы моментов Маркова дано В.И. Коробовым и Г.М. Скляром в [8]. Для формулировки этого результата обозначим

$$\Delta_p^{\pm}=\begin{cases}\Gamma_{1,k+1}^{\pm} & \text{при}\quad p=2k+1,\\ \Gamma_{2,k+1}^{\pm} & \text{при}\quad p=2k,\end{cases}\qquad p=1,\ldots,n.$$

Рассмотрим разложение $\dfrac{1}{R(z)}=1-\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{\bar\gamma_k}{z^k}$, тогда [20]

$$\bar\gamma_k=\frac{(-1)^{k-1}}{k!}\det\begin{pmatrix}-c_1 & 1 & 0 & \ldots & 0\\ -c_2 & -c_1 & 2 & \ldots & 0\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \\ -c_{k-1} & -c_{k-2} & \ldots & -c_1 & k-1\\ -c_k & -c_{k-1} & \ldots & -c_2 & -c_1\end{pmatrix}.$$

Теорема 1 [8]. Для любого $x^0\in\mathbb{R}^n$ решение $(\theta_s,u_s(t))$ задачи быстродействия для системы (5), где компоненты вектора s имеют вид $s_k=(-1)^k(k-1)!x_k^0$, $k=1,\ldots,n$, может быть найдено следующим образом:

(i) θ_s является наибольшим (вещественным) корнем уравнения

$$\Delta_n^{+}(\theta)\cdot\Delta_n^{-}(\theta)=0;$$

(ii) число точек переключения $q-1$ управления $u_s(t)$ единственным образом определяется из условий

$$\Delta_q^{+}(\theta_s)\cdot\Delta_q^{-}(\theta_s)=0,\qquad(\Delta_q^{+}(\theta_s))^2+(\Delta_q^{-}(\theta_s))^2\neq 0;$$

(iii) $u_s(\theta_s-0)=1$, если в предыдущих соотношениях $\Delta_q^+(\theta_s)=0$ и $u_s(\theta_s-0)=-1$ в противном случае;

(iv) все точки переключения $0<t_1<\dots<t_{q-1}<\theta_s$ управления $u_s(t)$ являются корнями уравнения

$$\begin{vmatrix} \gamma_2 & \gamma_3 & \dots & \gamma_{p+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \gamma_p & \gamma_{p+1} & \dots & \gamma_{2p-1} \\ 1 & z & \dots & z^{p-1} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -1 & \bar\gamma_1 & \dots & \bar\gamma_p \\ \bar\gamma_1 & \bar\gamma_2 & \dots & \bar\gamma_{p+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \bar\gamma_{p-1} & \bar\gamma_p & \dots & \bar\gamma_{2p-1} \\ 1 & z & \dots & z^p \end{vmatrix} = 0$$

при $q=2p$, или

$$\begin{vmatrix} \bar\gamma_1 & \bar\gamma_2 & \dots & \bar\gamma_p \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \bar\gamma_{p-1} & \bar\gamma_p & \dots & \bar\gamma_{2p-2} \\ 1 & z & \dots & z^{p-1} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 & \dots & \gamma_p \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \gamma_{p-1} & \gamma_p & \dots & \bar\gamma_{2p-2} \\ 1 & z & \dots & z^{p-1} \end{vmatrix} = 0$$

при $q=2p-1$, где $\gamma_k=\gamma_k^\pm(\theta_s)$ и $\bar\gamma_k=\bar\gamma_k^\pm(\theta_s)$, а знак $\pm$ соответствует значению $u_s(\theta_s-0)$ полученного в iii).

Доказательство (iv) дано в работе [20].

Этот метод позволяет решать задачу синтеза оптимального управления. Действительно, рассмотрим $\widetilde{c}_k^\pm(\theta,x)=c_k^\pm(\theta,s)$ где $s_i=(-1)^i(i-1)!x_i$ является полиномом переменных θ и x_i, и затем используем их для нахождения $\widetilde{\gamma}_k^\pm(\theta,x)=\gamma_k^\pm(\theta,s)$ как полинома переменных θ и x_i. Следовательно, $\widetilde{\Delta}_p^\pm(\theta,x)=\Delta_p^\pm(\theta,s)$ также являются полиномами переменных θ и x_i. Обозначим $\widetilde{\theta}_x=\theta_s$ где $s_i=(-1)^i(i-1)!x_i$. Тогда теорема 1 дает для решения задачи оптимального позиционного синтеза следующие явные формулы:

$$u(x)=(-1)^{p-1}\mathrm{sign}(\widetilde{\Delta}_p^-(\widetilde{\theta}_x,x)-\widetilde{\Delta}_p^+(\widetilde{\theta}_x,x)),$$

если

$$\widetilde{\Delta}_p^-(\widetilde{\theta}_x,x)\neq\widetilde{\Delta}_p^+(\widetilde{\theta}_x,x),$$
$$\widetilde{\Delta}_r^-(\widetilde{\theta}_x,x)=\widetilde{\Delta}_r^+(\widetilde{\theta}_x,x),\ r=1,\dots,p-1.$$

Более подробно аналитическое решение задачи быстродействия изложено в работах [8]–[14]. Дальнейшее развитие этих результатов для нелинейных управляемых систем проводится в работах [21]–[24] Г.М. Скляра и С.Ю. Игнатович.

4. Геометрический критерий управляемости

Сформулируем геометрический критерий управляемости системы

$$\dot x=Ax+\varphi(u),\ \ x\in\mathbb{R}^n,\ \ u\in\Omega\subset\mathbb{R}^r, \tag{8}$$

не в точку покоя системы, при наличии заданных ограничений на управление. Для этого введем понятие условия возвращаемости.

Если система (8) является 0-управляемой, т.е. $0 \in \operatorname{int} S$, то для некоторого $T > 0$ имеем $0 \in S(T)$. Это означает, что существует траектория системы (8), отвечающая допустимому управлению и начинающаяся в нуле при $t = 0$, которая в момент времени $t = T$ оканчивается в нуле. Будем говорить в этом случае, что выполняется условие возвращаемости точки ноль в силу системы (8) за время T.

В работе [25] дан следующий критерий управляемости.

Теорема 2. Для того, чтобы система (8) была 0-управляемой из окрестности, необходимо и достаточно, чтобы

1) выполнялось условие возвращаемости точки ноль на некотором отрезке $[T^*, T^* + a]$, $T^* \geq 0$, $a > 0$;

2) для некоторого $m \geq 0$ выполнялись два включения

$$0 \in \operatorname{int} co\{\varphi(\Omega), A\varphi(\Omega), \ldots, A^m\varphi(\Omega)\},$$

$$0 \in \operatorname{int} co\{\varphi(\Omega), -A\varphi(\Omega), \ldots, (-1)^m A^m\varphi(\Omega)\}.$$

Если матрица A не имеет вещественных собственных значений, то условие 2) может быть заменено на более слабое условие

2′) для некоторого $m \geq 0$

$$\operatorname{int}\, \mathrm{co}\{0, \varphi(\Omega), A\varphi(\Omega), \ldots, A^m\varphi(\Omega)\} \neq \varnothing.$$

5. Задача допустимого синтеза управлений

Интенсивное развитие математической теории управляемых процессов привело к возникновению принципиально новых направлений в теории дифференциальных уравнений, что в значительной мере определяет ее настоящее состояние. Отметим, прежде всего, проблему управляемости, поставленную Р. Калманом. Одним из таких направлений стал допустимый позиционный синтез управления для дифференциальных уравнений [26].

Задача допустимого позиционного синтеза управления для системы дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(t, x, u), \quad t \in [t_0, t_1],\ x \in \mathbb{R}^n,\ u \in \Omega \subset \mathbb{R}^r, \tag{9}$$

($0 \in \operatorname{int} \Omega$), состоит в построении управления $u = u(t, x)$, которое удовлетворяет заданным ограничениям $u(t, x) \in \Omega$, и такого, что траектория замкнутой системы

$$\dot{x} = f(t, x, u(t, x)), \tag{10}$$

начинающаяся в произвольной точке x_0 из некоторой окрестности Q начала координат, попадает в начало координат за конечное время $T(x_0)$. При этом мы рассматриваем случай, когда начало координат является точкой покоя системы, т. е. $f(0, u_0) = 0$ при некотором $u_0 \in \Omega$. Если $\mathrm{Q} = \mathbb{R}^n$, то синтез называется глобальным, а если $\mathrm{Q} \neq \mathbb{R}^n$, то локальным.

Заметим, что к задаче синтеза допустимого управления приходим естественным образом от задачи оптимального синтеза управления, отказываясь от оптимизации некоторого критерия качества.

Отметим некоторые трудности решения этой задачи. Прежде всего, замкнутая система не может удовлетворять условиям теоремы Пикара существования и единственности решения в области, в которой решается задача синтеза, поскольку через конечную точку $x = 0$ проходит бесконечное множество траекторий. Эту трудность можно обойти, если рассматривать управления, непрерывные при $x \neq 0$ и липшицевые в каждом кольце $\{x : 0 < \rho_1 \leq \|x\| \leq \rho_2\}$, но такие, что при $\rho_1 \to 0$ константы Липшица неограниченно возрастают, либо необходимо рассматривать разрывные управления, что, в свою очередь, вносит дополнительные трудности в решение этой задачи. Кроме того, поскольку управление $u(x)$ удовлетворяет наперед заданным ограничениям вида $u \in \Omega$, то даже в линейном случае замкнутая система является нелинейной.

5.1. Методы решения задачи синтеза

Для решения задачи допустимого синтеза позиционных управлений автором в 1978 году был предложен [27] метод функции управляемости.

Теорема 3 [27]–[29]. Рассмотрим управляемый процесс, описываемый уравнением $\dot{x} = f(x,u)$, где $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \Omega \subset \mathbb{R}^r$, вектор-функция $f(x,u)$ в каждой точке области $\{(x,u) :\ 0 < \rho_1 \leq \|x\| \leq \rho_2,\ u \in \Omega\}$ удовлетворяет условию Липшица

$$\|f(x',u') - f(x'',u'')\| \leq L_1(\rho_1,\rho_2)(\|x'' - x'\| + \|u'' - u'\|).$$

Пусть существует функция $\Theta(x)$, удовлетворяющая условиям:
1) $\Theta(x) \geq 0$ при $x \neq 0$ и $\Theta(0) = 0$;
2) $\Theta(x)$ непрерывна всюду и непрерывно-дифференцируема всюду за исключением, быть может, точки $x = 0$;
3) существует число $c > 0$ такое, что множество $\mathbb{Q} = \{x :\ \Theta(x) \leq c\}$ является ограниченным и $\mathbb{Q} \subset \{x :\ \|x\| < R\}$;
4) существует функция $u(x) \in \Omega$ при $x \in \mathbb{Q}$, удовлетворяющая неравенству

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \Theta(x)}{\partial x_i} f_i(x,u(x)) \leq -\beta \Theta^{1-\frac{1}{\alpha}}(x) \qquad (11)$$

при некоторых $\alpha > 0$ и $\beta > 0$, причем $u(x)$ в каждой области $K(\rho_1,\rho_2) = \{x \in \mathbb{Q} :\ 0 < \rho_1 \leq \|x\| \leq \rho_2\}$ удовлетворяет условию Липшица, т.е.

$$\|u(x'') - u(x')\| \leq L_2(\rho_1,\rho_2)\|x'' - x'\|\ \forall\, x', x'' \in K(\rho_1,\rho_2).$$

Тогда траектория $x(t)$ системы $\dot{x} = f(x,u(x))$, начинающаяся в произвольной точке $x_0 \in \mathbb{Q}$ в момент времени $t = 0$, оканчивается в точке $x_1 = 0$ в некоторый момент времени $T(x_0) \leq (\alpha/\beta)\Theta^{\frac{1}{\alpha}}(x_0)$, $x(t) \in \mathbb{Q}$, $x(t) = 0$ при $t > T(x_0)$, причем если $\alpha = \infty$, то $x(t) \to 0$ при $t \to \infty$.

Этот метод был развит на случай неавтономных систем.

Теорема 4 [30]. Рассмотрим управляемый процесс (9). Предположим, что вектор-функция $f(t,x,u)$ непрерывна по совокупности переменных и в области

$$\{(t,x,u):\ t_0 \le t \le t_1,\ 0<\rho_1 \le \|x\| \le \rho_2,\ u\in\Omega\}$$

удовлетворяет условию Липшица

$$\|f(t,x',u')-f(t,x'',u'')\| \le L_1(\rho_1,\rho_2)(\|x''-x'\|+\|u''-u'\|).$$

Пусть в области $\mathbb{G}=[t_0,t_1]\times\{x:\ \|x\|\le R\}$ $(0<R\le\infty)$ существует функция $\Theta(t,x)$, удовлетворяющая условиям:

1) $\Theta(t,x)>0$ при $x\neq 0$, $t\in[t_0,t_1]$, и $\Theta(t,0)=0$ для любого $t\in[t_0,t_1]$;

2) $\Theta(t,x)$ непрерывна всюду и непрерывно-дифференцируемая всюду, за исключением, быть может, точек вида $(t,0)$ при $t\in[t_0,t_1]$;

3) существует $c>0$ такое, что множество $\mathbb{Q}(t)=\{x:\ \Theta(t,x)\le c\}$ ограничено и $\mathbb{Q}(t)\subset\{x:\ \|x\|<R\}$ при всех $t\in[t_0,t_1]$;

4) существует функция $u(t,x)\in\Omega$ при $x\in\mathbb{Q}(t)$, $t\in[t_0,t_1]$ такая, что справедливо неравенство

$$\frac{\partial\Theta(t,x)}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\Theta(t,x)}{\partial x_i}f_i(t,x,u(t,x)) \le -\beta\Theta^{1-\frac{1}{\alpha}}(t,x)$$

при некоторых $\alpha>0$ и $\beta>0$, причем $u(t,x)$ в области

$$K_t(\rho_1,\rho_2)=\{(t,x): t\in[t_0,t_1], 0<\rho_1\le\|x\|\le\rho_2\} \tag{12}$$

удовлетворяет условию Липшица

$$\|u(t,x'')-u(t,x')\| \le L_2(\rho_1,\rho_2)\|x''-x'\|; \tag{13}$$

5) справедливо неравенство $c\le(\beta(t_1-t_0)/\alpha)^{\alpha}$.

Тогда при $\alpha<+\infty$ траектория системы (10), начинающаяся в произвольной точке $x_0\in\mathbb{Q}(t_0)$ в начальный момент времени t_0, оканчивается в точке $x_1=0$ в некоторый конечный момент времени t_0+T, где $T\le(\alpha/\beta)\Theta^{\frac{1}{\alpha}}(t_0,x_0)$, причем $x(t)\equiv 0$ при $t>t_0+T$. В случае $\alpha=+\infty$ решение $x(t)\to 0$ при $t\to\infty$.

Теорема 5 [26]. Пусть выполняются предположения теоремы 2 относительно функции $f(t,x,u)$ и условия 1) – 4), и пусть существует функция $\Theta(t,x)$ при $(t,x)\in\mathbb{G}$ такая, что справедливы неравенства

$$-\beta_1\Theta^{1-\frac{1}{\alpha_1}}(t,x) \le \frac{\partial\Theta(t,x)}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\Theta(t,x)}{\partial x_i}f_i(t,x,u(t,x)) \le -\beta_2\Theta^{1-\frac{1}{\alpha_2}}(t,x)$$

при некоторых положительных $\alpha_1,\beta_1,\alpha_2,\beta_2$, причем $u(t,x)$ в каждой области $K_t(\rho_1,\rho_2)$ вида (12) удовлетворяет условию Липшица (13), и пусть $c<(\beta_2(t_1-t_0)/\alpha_2)^{\alpha_2}$.

Тогда, если $\alpha_1 < \infty$, $\alpha_2 < \infty$, то траектория системы (10), начинающаяся в произвольной точке x_0 в начальный момент времени t_0, оканчивается в точке $x_1 = 0$ в некоторый конечный момент времени $t_0 + T$, причем

$$\frac{\alpha_1}{\beta_1}\Theta(t_0, x_0)^{\frac{1}{\alpha_1}} \le T \le \frac{\alpha_2}{\beta_2}\Theta^{\frac{1}{\alpha_2}}(t_0, x_0);$$

если же $\alpha_2 = \infty$, то траектория системы ни за какое конечное время не попадет в точку $x_1 = 0$.

В случае автономной системы, вместо неравенства (11) можно требовать выполнение следующего дифференциального неравенства

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial\Theta(x)}{\partial x_i} f_i(x, u(x)) \le -\varphi(\Theta(x)), \tag{14}$$

где $\varphi(\Theta) > 0$ при $\Theta \ne 0$, $\varphi(0) = 0$ и $\int\limits_0^a \frac{d\Theta}{\varphi(\Theta)} < \infty$ $(a > 0)$.

Большой интерес представляет случай, когда при построении синтезирующих управлений удается найти время движения $T(x_0)$ из произвольной точки x_0 в начало координат. В случае, когда $\Theta(x)$ и $u(x)$ таковы, что выполняется равенство

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial\Theta(x)}{\partial x_i} f_i(x, u(x)) = -1,$$

функция управляемости $\Theta(x)$ является временем движения $T(x)$ из точки x в точку 0, т. е. $\Theta(x) = T(x)$. Если, кроме того, управление $u(x)$ таково, что

$$\min_{u\in\Omega} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial\Theta(x)}{\partial x_i} f_i(x, u) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial\Theta(x)}{\partial x_i} f_i(x, u(x)) = -1,$$

то, обозначив $\omega(x) = -\Theta(x)$, получаем уравнение Беллмана

$$\max_{u\in\Omega} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial\omega(x)}{\partial x_i} f_i(x, u) = 1$$

в теории динамического программирования.

Выбор управления с помощью уравнения Беллмана можно трактовать с позиции минимизации функции $\Theta(x)$: управление $u(x)$ выбирается таким образом, чтобы угол между направлением быстрейшего убывания $\Theta(x)$ и направлением движения был минимальным. В методе функции управляемости указанный угол не обязательно является минимальным.

При $\alpha = \infty$ имеем

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \Theta(x)}{\partial x_i} f_i(x, u(x)) \leq -\beta \Theta(x), \tag{15}$$

и функция $\Theta(x)$ является функцией Ляпунова $V(x)$. Неравенство (15) означает, что при достаточно малых Θ угол между направлением движения и направлением убывания функции $\Theta(x)$ не меньше, чем в методе функции управляемости, так как $\Theta(x) \leq \Theta^{1-\frac{1}{\alpha}}(x)$ при $\alpha \geq 1$. Таким образом, угол между направлением движения и направлением убывания функции $\Theta(x)$ в методе функции управляемости не меньше, чем соответствующий угол в методе динамического программирования, и не больше, чем в методе функции Ляпунова.

Метод функции управляемости может быть распространен на случай, когда начало координат не является точкой покоя системы. Тогда синтез является неустойчивым в том смысле, что после попадания в ноль траектория не только не остается в нуле, но покидает некоторую его окрестность и снова возвращается в ноль за конечное время. Такие задачи не исследуются в рамках теории устойчивости.

Для функции управляемости $\Theta(x)$ естественным способом ее задания является неявный способ, т.е. функция $\Theta = \Theta(x)$ определяется как некоторое решение уравнения $\Phi(\Theta, x) = 0$. Эту функцию $\Phi(\Theta, x)$ требуется выбрать таким образом, чтобы производная функции управляемости $\Theta(x)$ в силу замкнутой системы удовлетворяла неравенству (14). Это отличает построение функции управляемости от традиционного явного задания функции Ляпунова.

С другой стороны, в линейной задаче быстродействия оптимальное время движения (которое является функцией управляемости) также находится в неявной форме.

Автором исследованы способы построения функции управляемости $\Theta(x)$ и позиционного управления $u(x)$ для линейных систем, в том числе в бесконечномерных пространствах, и некоторых классов нелинейных систем. Исследование задачи синтеза для нелинейных систем проводится двумя способами: с использованием первого приближения и с помощью отображения нелинейной системы на линейную.

Задача отображения нелинейных систем на линейные имеет и самостоятельное значение. Так, если нелинейная система оказывается отображаемой на линейную, то, во-первых, это позволяет установить ряд качественных свойств исходной нелинейной системы (стабилизируемость, управляемость и др.), и, во-вторых, получить конкретные решения различных задач, например, задачи синтеза или оптимального быстродействия.

Важный класс нелинейных систем, допускающих отображение на линейные системы, — это треугольные системы, которые описывают ряд физических процессов (ориентация спутника на орбите, управление роботом-манипулятором и другие). Класс треугольных систем был введен и впервые рассмотрен автором в 1973 году в работе [31] и предложен конструктивный метод отображения треугольной системы на линейную. Этот метод получил дальнейшее развитие. Заметим, что важной особенностью исходного подхода являются минимальные требования к гладкости правых частей нелинейных систем. Исследование задачи линеаризуемости при минимальных требованиях к гладкости правых частей проведено в работе [32].

5.2. Способы решения задач локального и глобального синтеза

В 1990 году В.И. Коробовым и Г.М. Скляром в работе [33] был дан метод построения довольно широкого класса управлений, решающих задачу локального и глобального синтеза. Для решения задачи синтеза также сформулирован допустимый принцип максимума, который по форме подобен принципу максимума в оптимальном управлении, но при этом указывается сопряженная функция (без необходимости решения краевой задачи для сопряженной системы), которая является функцией фазовых координат, а не времени, что позволяет определять позиционное управление.

Рассмотрим линейную систему

$$\begin{aligned} &\dot{x} = Ax + Bu, \quad u \in \{u : \|u\| \le d\} \subset \Omega, \\ &\operatorname{rang}(B, AB, \ldots, A^{n-1}B) = n. \end{aligned} \tag{16}$$

Обозначим через $\mathcal{F}$ множество невозрастающих неотрицательных на полуоси $[0, +\infty)$ функций $f(s)$, имеющих, по крайней мере, m точек убывания, таких, что

$$\int\limits_0^\infty s^{2m+1} e^{-2\lambda_0' s\Theta} f(s) ds < \infty \quad \text{при} \quad 0 \le \Theta \le \bar{\Theta}_f,$$

где m – степень минимального полинома матрицы A, $\lambda_0' = \min\{0, \lambda_0\}$, λ_0 – минимальная вещественная часть собственных значений матрицы A.

Пусть $f \in \mathcal{F}$. Обозначим через $N_f(\Theta)$ при $0 < \Theta \le \bar{\Theta}_f$ матрицу вида

$$N_f(\Theta) = \int\limits_0^\infty f(t/\Theta) e^{-At} BB^* e^{-A^*t} dt.$$

Для любого $x \in \mathrm{Q}^1 \setminus \{0\}$ ($\mathrm{Q}^1 = \{x : \|x\| \le R\}$) уравнение

$$2a_0\Theta^\nu = (N_f^{-1}(\Theta)x, x), \quad a_0 > 0, \quad \nu \ge 1, \tag{17}$$

имеет единственное положительное непрерывно дифференцируемое решение $\Theta = \Theta(x)$. Доопределим функцию $\Theta(x)$ значением $\Theta(0) = 0$, тогда функция $\Theta(x)$ станет непрерывной в нуле. Существует постоянная $C > 0$ такая, что множество $\mathrm{Q} = \{x : \Theta(x) \le C\}$ ограничено и $\mathrm{Q} \subset \mathrm{int}\,\mathrm{Q}^1$.

Зададим управление $u(x)$ формулой

$$u(x) = -\frac{1}{2} f(0) B^* N_f^{-1}(\Theta(x))x, \quad x \in \mathrm{Q}^1 \setminus \{0\}. \tag{18}$$

Теорема 6 [33]. При достаточно малых значениях коэффициента a_0 : $0 < a_0 \le a_f$ управление вида (18) решает для системы (16) задачу локального позиционного синтеза непрерывного управления, удовлетворяющего ограничению $u \in \{u : \|u\| \le d\} \subset \Omega$.

Теорема 7 [33]. Пусть все собственные числа матрицы A имеют не положительную вещественную часть и $f(\tau)$ – финитная функция. Тогда при достаточно малых значениях коэффициента $a_0 : 0 < a_0 \le \bar{a}_f$ и при $\nu = 1$ управление вида (18) решает для системы (16) задачу глобального позиционного синтеза непрерывного управления, удовлетворяющего ограничению $u \in \{u : \|u\| \le d\}$.

5.3. Допустимый принцип максимума

Пусть $\mathrm{Q}_\Theta = \{x : \Theta(x) \le \Theta\}$, где функция управляемости $\Theta(x)$ определяется из уравнения (17), $\psi(x)$ – опорный вектор к границе множества Q_Θ, который имеет вид $\psi(x) = -N_f^{-1}(\Theta(x))x$. Будем выбирать управление $u(x)$ из соотношения

$$(\psi(x), \varphi(x, \widehat{u}(x))) = \max_{u \in \Omega}(\psi(x), \varphi(x, u)), \ x \ne 0; \tag{19}$$

$\widehat{u}(0) = 0$, которое назовем допустимым принципом максимума. Равенство (19) определяет в области $\mathrm{Q}' = \{x : \Theta(x) \le C'_f\}$, вообще говоря, разрывное и многозначное управление $\widehat{u}(x)$ (функция $\widehat{u}(x)$ многозначна в точках x, в которых максимум в этом равенстве достигается при не единственном значении u). Поэтому решение $x(t)$ уравнения будем понимать в смысле дифференциального включения

$$\dot{x} \in F(x) = \varphi(x, \widehat{u}(x)), \quad x(0) = x_0 \in \mathrm{Q}'. \tag{20}$$

Теорема 8 [33]. Пусть задача Коши (20) разрешима на отрезке $[0,\Theta(x_0)/M_f]$ и $x(t)$ — ее решение. Тогда существует $T(x_0) \in [0, \Theta(x_0)/M_f]$ такое, что $x(t) \equiv 0$ при $t \ge T(x_0)$.

Доказательство теоремы непосредственно следует из неравенства

$$(\Theta'_x, \varphi(x, \widehat{u}(x))) \le (\Theta'_x, \varphi(x, u(x))) \le -M_f, \quad M_f > 0,$$

в котором управление $u(x)$ определяется формулой (18).

В случае линейной по управлению системы $\dot{x} = \varphi(x) + Bu$ управление, определяемое из допустимого принципа максимума, принимает граничные значения $\widehat{u}(x) \in \partial\Omega$. Если к тому же управление одномерно, т. е. система имеет вид $\dot{x} = \varphi(x) + bu$, $b \in \mathbb{R}^n$, и ограничение, например, имеет вид $u \in \Omega = [-1, 1]$, то

$$\widehat{u}(x) = \begin{cases} -\operatorname{sign} b^* N_f^{-1}(\Theta(x)x) & \text{при} \quad b^* N_f^{-1}(\Theta(x)x \neq 0, \\ [-1, 1] & \text{при} \quad b^* N_f^{-1}(\Theta(x)x = 0. \end{cases}$$

С помощью допустимого принципа максимума решается также задача глобального синтеза для линейной системы (16), в которой собственные значения матрицы A имеют не положительную вещественную часть.

5.4. Функция управляемости как время движения

Рассмотрим случай матрицы интегрального вида. Пусть функция $f(s)$ имеет вид

$$f(s) = \begin{cases} (1-s)^\nu & \text{при } 0 \leq s < 1, \\ \quad 0 & \text{при } s \geq 1, \end{cases} \qquad N_f(\Theta) = \int\limits_0^\Theta \left(1 - \frac{t}{\Theta}\right)^\nu e^{-At} BB^* e^{-A^* t} dt.$$

В этом случае управление $u(x)$ из (18) и функция $\Theta(x)$, определяемая уравнением (17), таковы, что выполняется равенство $\dot{\Theta}(x) = -1$, являющееся частным случаем дифференциального неравенства (11) при $\alpha = \beta = 1$, и поэтому функция управляемости $\Theta(x)$ является временем движения из точки x в начало координат.

Нахождение более широкого множества таких пар функций — функции управляемости $\Theta(x)$, являющейся временем движения, и управления $u(x)$, решающих задачу допустимого синтеза, — приведено в работах [34, 35].

5.5. Синтез инерционных управлений

Автором совместно с В.А. Скориком рассмотрена задача построения позиционного управления с ограничениями не только на управление, но и на его производные до заданного порядка [36, 37]. Такие управления рассматривались в [1, стр. 292] и были названы инерционными.

Задача синтеза инерционных управлений состоит в следующем: для системы $\dot{x} = f(x, u)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^r$, найти управление $u = u(x)$ такое, что:

(i) существует окрестность Q начала координат такая, что любая траектория системы $\dot{x} = f(x, u(x))$, начинающаяся в произвольной начальной точке $x_0 \in \mathrm{Q}$, содержится в Q и оканчивается в начале координат в некоторый конечный момент времени $T(x_0)$;

(ii) управление $u(x)$ удовлетворяет наперед заданным ограничениям:

$$\|u^{(k)}(x)\| \leq d_k, \quad k = 0, 1, \ldots, l, \quad x \in \mathrm{Q},$$

где d_0, …, d_l — заданные числа и $u^{(k)}(x)$ — производная k-го порядка управления $u(x)$ в силу системы $\dot{x} = f(x, u(x))$.

Рассмотрим линейную систему

$$
\begin{aligned}
&\dot{x} = Ax + Bu, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^r, \\
&\operatorname{rang}(B, AB, \ldots, A^{n-1}B) = n.
\end{aligned} \tag{21}
$$

Не ограничивая общности, предположим, что $\operatorname{rang} B = r$ и векторы

$$
b_1, \ldots, A^{n_1-1}b_1, \ldots, b_r, \ldots, A^{n_r-1}b_r \tag{22}
$$

являются линейно независимыми, где b_i — i-й столбец матрицы B, $n_1 \geq \ldots \geq n_r \geq 1$, $n_1 + \ldots + n_r = n$.

Рассмотрим относительно параметра α семейство матриц $\left\{F_\alpha^{-1}(\Theta)\right\}_{\alpha \geq 1}$ вида

$$
F_\alpha^{-1}(\Theta) = \int\limits_0^{\alpha\Theta^{\frac{1}{\alpha}}} \left(1 - \frac{t}{\alpha\Theta^{\frac{1}{\alpha}}}\right)^\alpha e^{-A_0 t} B_0 B_0^* e^{-A_0^* t} dt,
$$

где $A_0 = \operatorname{diag}(A_{01}, \ldots, A_{0r})$ – $(n \times n)$-матрица, в которой A_{0i} – $(n_i \times n_i)$-матрица с равными единице элементами первой наддиагонали и равными нулю остальными элементами, $B_0 = (e_{s_1}, \ldots, e_{s_r})$ – $(n \times r)$-матрица, в которой e_{s_i} – s_i-й орт пространства $\mathbb{R}^n$, $s_i = n_1 + \ldots + n_i$, $i = 1, \ldots, r$.

Выберем векторы $c_1, \ldots, c_r$, являющиеся решениями систем $K^* c_i = e_{s_i}$, $i = 1, \ldots, r$, где матрица K имеет вид

$$
K = (b_1 \ \ldots \ A^{n_1-1}b_1 \ \ldots \ b_r \ \ldots \ A^{n_r-1}b_r),
$$

и образуем невырожденную матрицу

$$
L = \left(c_1 \ \ A^* c_1 \ \ldots \ {A^*}^{n_1-1} c_1 \ \ldots \ c_r \ \ A^* c_r \ \ldots \ {A^*}^{n_r-1} c_r\right)^*.
$$

Рассмотрим функцию

$$
\Phi_\alpha(\Theta, x) = 2a_0\Theta - (L^* F_\alpha(\Theta) L x, x),
$$

область $\mathrm{Q}_\alpha^1 = \{x : \ \|x\| \leq R_\alpha\}$, где $R_\alpha > 0$, в которой при $x \neq 0$ определим функцию управляемости $\Theta_\alpha(x)$ как единственное положительное решение уравнения $\Phi_\alpha(\Theta, x) = 0$, и положим $\Theta_\alpha(0) = 0$.

Зададим управление $u_\alpha(x)$ в области $\mathrm{Q}_\alpha^1 \setminus \{0\}$ формулой

$$
u_\alpha(x) = -M^{-1} B_0^* \left(\frac{1}{2} F_\alpha(\Theta_\alpha(x)) L + LA\right) x, \tag{23}
$$

где M – верхнетреугольная $(r \times r)$-матрица, элементы главной диагонали которой равны единице, а $m_{ij} = c_i^* A^{n_i-1} b_j$ для $j = i+1, \ldots, r$, $i = 1, \ldots, r$.

Теорема 9 [37]. Предположим, что для системы (21) выполнено условие (22). Пусть $\alpha_0 = 2l+1$.

Тогда для каждого фиксированного $\alpha \geq \alpha_0$ существует $\widehat{a}_0$ такое, что для a_0, удовлетворяющего соотношению $0 < a_0 \leq \widehat{a}_0$, управление $u_\alpha(x)$ вида (23) решает задачу синтеза инерционных управлений в области $\mathrm{Q}_\alpha = \{x : \Theta_\alpha(x) \leq c_\alpha\}$, причем время движения $T_\alpha(x_0)$ из произвольной начальной точки $x_0 \in \mathrm{Q}_\alpha$ в начало координат равно $\alpha \Theta_\alpha^{\frac{1}{\alpha}}(x_0)$.

5.6. Управление нелинейными системами

Рассмотрим введенную автором треугольную систему

$$\dot{x} = f(x,u), \quad x \in \mathbb{R}^n, \ u \in \mathbb{R},$$

$$f(x,u) = \begin{pmatrix} f_1(x_1,x_2) \\ . \quad . \quad . \\ f_{n-1}(x_1,\ldots,x_n) \\ f_n(x_1,\ldots,x_n,u) \end{pmatrix}, \tag{24}$$

заданную в некоторой области $\mathrm{Q} \subset \mathbb{R}^n$. Приведем результаты работы [31].

Теорема 10 [31]. Пусть в (24) функции $f_i(x_1,\ldots,x_{i+1})$, $i=1,\ldots,n$ $(x_{n+1}=u)$, имеют непрерывные частные производные до $(n-i+1)$-го порядка включительно и пусть $\left|\dfrac{\partial f_i}{\partial x_{i+1}}\right| \geq a > 0$, $i=1,\ldots,n$, при всех $x_1,\ldots,x_{n+1}$, где a – постоянная, не зависящая от $x_1, \ldots, x_{n+1}$. Тогда система (24) полностью управляемая за время T.

Теорема 11 [31]. Пусть выполнены условия теоремы 10 и пусть функции $f_i(0,\ldots,0)=0$, $i=1,\ldots,n$.

Тогда можно выбрать управление $u = u(x_1,\ldots,x_n)$ таким образом, чтобы нулевое решение системы (24) с этим управлением было асимптотически устойчивым.

В этой работе был впервые предложен конструктивный метод отображения треугольной системы на линейную. Развитие этого результата приведено в работе [38]. Для $k=1,\ldots,n$ обозначим $\mathrm{Q}_{n+1} = \mathrm{Q} \times \mathbb{R}$,

$$\mathrm{Q}_k = \{(x_1,\ldots,x_k)^* : (x_1,\ldots,x_k,\widetilde{x}_{k+1},\ldots,\widetilde{x}_n)^* \in \mathrm{Q}\}.$$

Теорема 12 [38]. Для того чтобы система (24) (с функциями f_k класса $\mathrm{C}^{n-k+1}(\mathrm{Q}_{k+1})$, $k=1,\ldots,n$) отображалась локально в области Q на каноническую систему с помощью замены переменных $z = F(x)$ (класса $\mathrm{C}^2(\mathrm{Q})$ с невырожденным якобианом) и аддитивной замены управления $v = G(x_1,\ldots,x_n) + u$ (класса $\mathrm{C}^1(\mathrm{Q})$), необходимо и достаточно, чтобы для любых $x \in \mathrm{Q}$, $u \in \mathbb{R}$ выполнялось равенство

$$\frac{\partial f_n(x_1,\ldots,x_n,u)}{\partial u} \prod_{i=1}^{n-1} \frac{\partial f_i(x_1,\ldots,x_{i+1})}{\partial x_{i+1}} = c(x_1), \tag{25}$$

где $c(x_1)$ — n раз непрерывно-дифференцируемая функция, не обращающаяся в нуль в области Q_1.

Пример. Рассмотрим для треугольной системы вида

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \dfrac{25x_2}{27x_1^2+9}, \\ \dot{x}_2 = x_1+\dfrac{1}{3}\,x_3^3+x_3, \\ \dot{x}_3 = -\dfrac{25x_2}{9(1+x_3^2)(3x_1^2+1)} + \dfrac{u}{1+x_3^2} \end{cases} \tag{26}$$

задачу быстродействия из точки $x^0 = (4/3, 0, -1)^*$ в точку $x^1 = (0, 0, 0)^*$ с ограничениями на управление $|u| \le 1$. Условие (25) выполняется, так как

$$\frac{\partial f_3}{\partial u} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_2} = \frac{25}{27x_1^2+9} = c(x_1).$$

Тогда $F_1'(x_1) = \dfrac{1}{c(x_1)} = \dfrac{9}{25}(3x_1^2+1)$, $F_1(x_1) = \dfrac{9}{25}(x_1^3+x_1)$. Нетрудно видеть, что

$$\frac{\partial F_1}{\partial x_1} \ge \frac{9}{25}, \quad \frac{\partial F_1}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_2} = 1, \quad \frac{\partial F_1}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial x_3} = x_3^2 + 1 \ge 1.$$

Система (26) отображается на каноническую систему

$$\dot{z}_1 = z_2, \quad \dot{z}_2 = z_3, \quad \dot{z}_3 = u, \quad |u| \le 1, \tag{27}$$

с помощью замены переменных

$$z_1 = \frac{9}{25}\,(x_1^3 + x_1), \quad z_2 = x_2, \quad z_3 = x_1 + \frac{1}{3}\,x_3^3 + x_3.$$

Таким образом, задача быстродействия из точки x^0 в точку x^1 для системы (26) при ограничениях на управление $|u| \le 1$ свелась к задаче быстродействия для системы (27) из точки $z^0 = (4/3, 0, 0)^*$ в точку $z^1 = (0, 0, 0).^*$

Воспользовавшись результатами работы [8], в которой дается уравнение для нахождения времени быстродействия и моментов переключения, получаем, что в нашем случае это уравнение имеет вид $3\Theta^4 - 128\Theta = 0$, откуда время быстродействия $\Theta_0 = 4\sqrt[3]{2/3}$, а моменты переключения соответственно равны: $t_1 = \sqrt[3]{2/3}$, $t_2 = 3\sqrt[3]{2/3}$; на интервалах $(0, t_1)$, (t_2, Θ_0) управление равно -1, а на интервале (t_1, t_2) управление равно $+1$. Это управление будет оптимальным по быстродействию, переводящее точку x^0 в точку x^1 для системы (26).

Дальнейшее исследование отображаемости управляемых нелинейных систем на линейные управляемые системы приведено в работах [39, 32].

Исследование задачи синтеза проводится с помощью функционала $\Theta(x)$ – функционала управляемости, играющего роль, аналогичную функционалу Ляпунова в задачах устойчивости.

Общая теорема о решении задачи синтеза — метод функционала управляемости [40, 41] — имеет следующий вид.

Теорема 13. Рассмотрим уравнение $dx/dt = Ax + f(x,u)$, где $x \in X$, $u \in U$, X и U – банаховы пространства, оператор A порождает сильно непрерывную группу операторов $\{e^{At}\}_{-\infty<t<\infty}$, функция $f(x,u)$ непрерывна на $X \times U$ и в любой области $\{(x,u) : 0 < \rho_1^2 \leq \|x\|^2 + \|u\|^2 \leq \rho_2^2 < \infty\}$ удовлетворяет условию Липшица

$$\|f(x'',u'') - f(x',u')\| \leq L_1(\rho_1,\rho_2)(\|x''-x'\| + \|u''-u'\|).$$

Пусть в замкнутой области Q^1, $0 \in \mathrm{int}\ \mathrm{Q}^1$, существует непрерывный функционал $\Theta(x)$, удовлетворяющий условиям:

1) $\Theta(x) > 0$ при $x \neq 0$ и $\Theta(0) = 0$;

2) если $\Theta(x) \to 0$, то $x \to 0$, т.е. для любого числа $\varepsilon > 0$ существует число $\delta > 0$ такое, что из $\Theta(x) < \delta$ следует $\|x\| < \varepsilon$;

3) существует $C > 0$ такое, что множество $\mathrm{Q} = \{x : \Theta(x) \leq C\}$ ограничено и $\mathrm{Q} \subset \mathrm{int}\ \mathrm{Q}^1$;

4) $\Theta(x)$ – непрерывно дифференцируемым (производные в смысле Фреше) в области Q^1 за исключением, быть может, точки $x = 0$;

5) существует управление $u(x)$, $x \in X$, удовлетворяющее ограничению $u(x) \in \Omega \subset U$, $x \in \mathrm{Q}$, и такое, что в любом кольце

$$K(\rho_1,\rho_2) = \{x : 0 < \rho_1 \leq \|x\| \leq \rho_2 < \infty\}$$

выполняется условие Липшица

$$\|u(x'') - u(x')\| \leq L_2(\rho_1,\rho_2)\|x''-x'\|;$$

6) функция $\Phi(x_0,t) = \Theta(x(t))$ непрерывно дифференцируема по t, если $x(t)$ является обобщенным решением задачи Коши

$$dx/dt = Ax + f(x,u(x)), \quad x(0) = x_0 \in \mathrm{Q} \setminus \{0\}$$

и функционал $\Psi(x_0) = \Phi_t(x_0,0)$ непрерывен по x_0 в $\mathrm{Q} \setminus \{0\}$;

7) при $x \in D(A) \bigcap (\mathrm{Q} \setminus \{0\})$ при некоторых $\alpha > 0$ и $\beta > 0$

$$\Psi(x) = \langle \Theta_x, Ax + f(x,u(x)) \rangle \leq -\beta \Theta^{1-\frac{1}{\alpha}}(x).$$

Тогда для любого $x_0 \in \mathrm{Q} \setminus \{0\}$ существует $0 < T(x_0) \leq \alpha \Theta^{\frac{1}{\alpha}}(x_0)/\beta$ (если $\alpha = \infty$, то $0 < T(x_0) \leq \infty$) такое, что:

а) существует единственное на полуинтервале $[0,T(x_0))$ обобщенное решение $x(t)$ задачи Коши $dx/dt = Ax + f(x,u(x))$, $x(0) = x_0$;

б) $\lim\limits_{t \to T(x_0)} x(t) = 0$ и $x(t) \in \mathrm{Q}$ при $t \in [0,T(x_0))$.

Справедлива следующая теорема о локальном решении задачи синтеза ограниченных управлений для линейной системы.

Теорема 14. Рассмотрим уравнение

$$dx/dt = Ax + Bu, \quad x \in X,\ u \in U, \tag{28}$$

где X и U – гильбертовы пространства, $A \in [X, X]$, $B \in [U, X]$. Предположим, что уравнение (28) точно 0-управляемое.

Пусть $\mathrm{Q}^1 = \{x : \|x\| \le R\}$ и $\Theta(x)$ – функционал, определяющийся уравнением $2a_0\Theta = \big(N^{-1}(1/\Theta)x, x\big)$ в области $\mathrm{Q}^1 \setminus \{0\}$, $\Theta(0) = 0$. Тогда существует $C > 0$ такое, что $\mathrm{Q}_c \subset \mathrm{int}\ \mathrm{Q}^1$, где $\mathrm{Q}_c = \{x : \Theta(x) \le C\}$, и для любого $x_0 \in \mathrm{Q}_c \setminus \{0\}$ единственное решение $x(t)$ уравнения (28) с управлением

$$u(x) = -B^* N^{-1}(1/\Theta(x))x, \quad x \in \mathrm{Q}_c \setminus \{0\},$$

и начальным условием $x(0) = x_0$ определено на некотором полуинтервале $[0, T(x_0))$ и удовлетворяет условию $\lim\limits_{t \to T(x_0)} x(t) = 0$, где $T(x_0) \le \gamma\Theta(x_0)$ $(\gamma > 0)$. При этом для любого $d > 0$ и числа a_0, удовлетворяющего условию $0 < a_0 \le \dfrac{d^2}{2^{k+2} + 2^{k+1}r_2/\gamma - 4}$, в котором k определено соотношением

$$Bu_0 + ABu_1 + \ldots + A^k Bu_k = X, \tag{29}$$

управление $u(x)$ удовлетворяет ограничению $\|u(x)\| \le d$, $x \in \mathrm{Q}_c \setminus \{0\}$.

Выполнение соотношения (29) означает выполнения критерия точной управляемости уравнения (28) и в банаховых пространствах, приведенного в работе [42].

ЛИТЕРАТУРА

1. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальних процессов. – М.: Наука, 1961.– 391 с.
2. Охоцимский Д.Е. К теории движения ракет // Прикладная Математика и Механика.– 1946. – Т. X, вып. 2. – С. 251—272.
3. Красовский Н.Н. Теория управления движением. – М.: Наука, 1968. – 475 с.
4. Чебышев П.Л. Sur less valeurs limites des integrales // Journ. de math. pures et appl. – 1874. – II ser. XIX.
5. Стилтьес Т. Исследования о непрерывных дробях, 1894.
6. Hamburger H. Uber eine Erweiterung des Stieltjesschen Momenteproblems // Math. Ann. – 1921. – No. 82.
7. Hausdorff F. Momentenprobleme für ein endliches Intervall // Math. Zeitschr. – 1923. – No. 16.
8. Коробов В.И., Скляр Г.М. Оптимальное быстродействие и степенная проблема моментов // Математический сборник. – 1987. – Т. 134 (176), № 2 (10). – С. 186 – 206.

9. Коробов В.И., Скляр Г.М. Решение задачи быстродействия для колебательной системы // Докл. АН УССР, сер. А.– 1987. – № 10. – С. 6–9.
10. Коробов В.И., Скляр Г.М. Точное решение одной n-мерной задачи быстродействия // Докл. АН СССР, 1988.– Т. 298, № 6. – С. 1304–1308.
11. Коробов В.И., Скляр Г.М. Оптимальное быстродействие и тригонометрическая проблема моментов // Известия АН СССР, сер. Математика. – 1989. – Т. 53, № 4. – С. 868–885.
12. Коробов В.И., Скляр Г.М. Проблема моментов Маркова на минимально возможном отрезке // Доклады АН СССР. – 1989. – Т. 308, № 3. – С. 525–528.
13. Коробов В.И., Скляр Г.М. Min-проблема моментов Маркова и быстродействие // Сибирский математический журнал. – 1991. – Т. 32, № 1. – С. 60–71.
14. Korobov V.I., Sklyar G.M. Markov power min-problem with periodic gaps // Journal of Mathematical Sciences. – 1996. – Vol. 80, No. 1.
15. Марков А.А. О некоторых приложениях алгебраических непрерывных дробей. Диссертация. – 1884.
16. Марков А.А. // Записки Академии Наук, сер. VIII. – 1986. – Т. III, № 5.
17. Марков А.А. Избранные труды. – М.: Гостехиздат, 1948. – 320 с.
18. Ахиезер Н.И., Крейн М.Г. О некоторых вопросах теории моментов.– Харьков: ГНТИ Укр., 1938. –254 с. (книга представляет сборник отдельных статтей).
19. Крейн М.Г., Нудельман А.А. Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи. – М.: Наука, 1973. – 551 с.
20. Коробов В.И., Скляр Г.М., Флоринский В.В. Методы построения оптимальных управлений для канонической управляе-мой системы // Математическая физика, анализ, геометрия. – 1999. – Т. 6, № 3/4. – С. 264–287.
21. Sklyar G.M., Ignatovich S.Yu. Moment approach to nonlinear time optimality // SIAM J. on Control and Optimization. – 2000. – Vol. 38, No. 6. – P. 1707–1728.
22. Sklyar G.M., Ignatovich S.Yu. Representations of control systems in the Fliess algebra and in the algebra of nonlinear power moments // Syst. Control Lett. – 2002. – No. 47. – P. 227–235.
23. Sklyar G.M., Ignatovich S.Yu. Approximation of time-optimal control problems via nonlinear power moment min-problems // SIAM J. on Control and Optimization. – 2003.– Vol. 42, No. 4. – P. 1325–1346.
24. Sklyar G.M., Ignatovich S.Yu. Description of all privileged coordinates in the homogeneous approximation problem for nonlinear control systems // C. R., Math., Acad. Sci. Paris. – 2007. – Vol. 344 , No. 2. – P. 109–114.
25. Korobov V.I. Geometric Criterion for Controllability under Arbitrary Constraints on the Control // J. Optimiz. and Appl. – 2007. – Vol. 134. – P. 161–176.
26. Коробов В.И. Метод функции управляемости: Монография. – М.-Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2007. – 576 с.

27. Коробов В.И. Общий подход к решению задачи синтеза ограниченных управлений в задаче управляемости // Математический сборник. – 1979. – Т. 109(151), № 4 (8) . – С. 582–606.
28. Коробов В.И. Решение задачи синтеза с помощью функции управляемости// Доклады АН СССР. – 1979. – Т. 248, № 5. – С. 1051–1055.
29. Коробов В.И. Общий метод решения задачи синтеза ограниченных управлений // Вестник ХГУ, серия "Прикладная математика и механика". – 1980. – № 205. – С. 59–73.
30. Бессонов Г.А., Коробов В.И., Скляр Г.М. Задача устойчивого синтеза ограниченных управлений для некоторого класса нестационарных систем // Прикладная математика и механика.– 1988.– Т. 52.– Вып. 1.– С. 9–15.
31. Коробов В.И. Управляемость, устойчивость некоторых нелинейных систем // Дифференциальные уравнения. – 1973. – Т. 9, № 4. – С. 614–619.
32. Sklyar G.M., Sklyar K.V., Ignatovich S.Yu. On the extension of the Korobov's class of linearizable triangular systems by nonlinear control systems of the class C^1 // Systems Control Letters. – 2005. – Vol. 54. – P. 1097–1108.
33. Коробов В.И., Скляр Г.М. Методы построения позиционных управлений и допустимый принцип максимума // Дифференциальные уравнения. – 1990. – Т. 26, № 11. – С. 1914–1924.
34. Чоке Риверо А.Е., Коробов В.И., Скорик В.А. Функция управляемости как время движения. I // Математическая физика, анализ, геометрия. – 2004. – Т. 11, № 3. – С. 341–354.
35. Чоке Риверо А.Е., Коробов В.И., Скорик В.А. Функция управляемости как время движения. II // Математическая физика, анализ, геометрия. – 2004. – Т. 11, № 3. – С. 341–354.
36. Коробов В.И., Скорик В.А. Позиционный синтез ограниченных инерционных управлений для систем с одномерным управлением // Дифференциальные уравнения. – 2001. Т. 38, № 3. – С. 319–331.
37. Korobov V.I., Skoryk V.O. Synthesis of restricted inertial controls for systems with multivariate control // Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2002. – Vol. 275, No. 1. P. 84–107.
38. Скляр Е.В. Отображение треугольных управляемых ситем на линейные без замены управления // Дифференциальные уравнения. – 2002. – Т. 38, № 1. – С. 34–43.
39. Скляр Е.В. О классе нелинейных управляемых систем, отображающихся на линейные // Математическая физика, анализ, геометрия. – 2001. – № 2/4. – С. 205 – 214.
40. Коробов В.И., Скляр Г.М. Решение задачи синтеза с помощью функционала управляемости для систем в бесконечномерных пространствах // Доклады АН УССР, сер. А. – 1983. – № 5. – С. 11–14.
41. Коробов В.И., Скляр Г.М. Синтез управлений в уравнениях, содержащих неограниченный оператор // Теория функций, функциональный анализ и их приложения. – 1986. – Вып. 45. – С. 45–63.
42. Коробов В.И., Рабах Р. Точная управляемость в банаховом пространстве // Дифференциальные уравнения, 1979. – Т. 15, № 12. – С. 2142–2150.