ПРО ПОБУДОВУ ТОЧНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ІЗ ЗАДАНИМ КЛАСОМ ДИФЕРЕНЦІЙОВНОСТІ В ОБЛАСТЯХ СКЛАДНОЇ ФОРМИ

Литвин О.М., Лобанова Л.С.

Українська інженерно-педагогічна академія, Харків, Україна

В праці [1] запропоновано загальний метод побудови точних розв'язків крайових задач для диференціальних рівнянь з частинними похідними другого порядку еліптичного типу в областях складної форми. Метод істотно використовує оператори сплайн–інтерлінації функцій двох змінних. В даній роботі метод сплайн–інтерлінації функції двох змінних використовується для побудови і дослідження точних розв'язків неоднорідних крайових задач для диференціальних рівнянь еліптичного типу, що мають заданий клас диференційованості, в областях складної форми. Актуальність роботи пояснюється тим, що при розробці нових чисельних методів розв'язання крайових задач в областях складної форми виникає необхідність тестування запропонованих алгоритмів, яке зручно проводити на задачах з відомими розв'язками, що дозволяє зробити аналіз точності наближення. В роботі розглянуто приклади для області, яка має форму "швеллера", та для Z – подібної області.

Стан проблеми. Як відомо, загальний метод побудови функцій, які задовольняють неоднорідним граничним умовам Діріхле, Неймана та мішаним, може бути реалізований за допомогою R–функцій, запропонованих В.Л. Рвачовим [2–4]. Але, як відмічається у роботі [5], при використанні структурного методу, побудованого з використанням R–функцій В. Л. Рвачова, виникають деякі проблеми: проблема кутових точок; проблема продовження слідів функцій і їх нормальних похідних з границі у внутрішні точки області інтегрування G зі збереженням класу диференційованості $C^r(G)$; проблема зміни типу граничних умов у деяких довільних точках границі; проблема побудови структур наближених розв'язків із заданими слідами на M лініях, якщо $m\,(m \geq 3)$ з них перетинаються в одній точці тощо. Ці наведені вище проблеми можуть бути успішно розв'язані за допомогою методів інтерлінації функції двох змінних, інтерфлетації функції трьох або більше змінних [5–6]. Тому використаний в даній роботі метод побудови точних розв'язків не завжди може бути застосований при використанні R–функцій.

Постановка задачі. На основі сплайн – інтерлінації функцій двох змінних побудуємо точний розв'язок крайової задачі для самоспряженого еліптичного оператора 2m-го порядку:

$$L_{2m}u(x,y) = f(x,y), \quad (x,y) \in \Omega \tag{1}$$

$$\left.\frac{\partial^p u}{\partial \nu^p}\right|_{\partial\Omega} = g_p(x,y), \quad p = \overline{0, m-1} \tag{2}$$

ν – нормаль, направлена всередину області Ω,

$$L_{2m} = \sum_{r+s\le m} (-1)^{r+s} D^{(r,s)}(a_{r,s}(x,y)D^{(r,s)}).$$

Теорема. Нехай права частина диференціального рівняння (1) визначається рівністю $f(x,y) = L_{2m}U(x,y)$, де $U(x,y)$ визначається відповідною формулою інтерлінації в кожному з елементів розбиття області інтегрування Ω прямими $x = x_k$, $y = y_\ell$ $(k = \overline{0, n_1+1},\ \ell = \overline{0, n_2+1})$ (прямокутному, прямокутному з однією криволінійною, взагалі кажучи, стороною, яка належить до границі області Ω інтегрування, трикутному, трикутному, з однією криволінійною, взагалі кажучи, гіпотенузою, яка належить границі області інтегрування,). Тоді існують такі функції $\phi_{\ell,q}(x)$, $\psi_{k,p}(y)$, $0 \le p,q \le r$ та сталі $u^{(p,q)}(x_k, y_\ell)$, при яких $U(x,y) \in C^r\left(\overline{D}\right), r \ge 1$ і є точним розв'язком крайової задачі із вказаною правою частиною та граничними умовами Діріхле, або є точним розв'язком крайової задачі із вказаною правою частиною та граничними умовами Діріхле, або Неймана або мішаними граничними умовами. В залежності від типу граничних умов і від значення r функції $\phi_{\ell,q}(x)$, $\psi_{k,p}(y)$, $0 \le p,q \le r$ вибираються рівними заданим граничним функціям.

Опис методу. Припустимо, що область $\Omega \subset [a,b]\times[c,d]$ є багатокутником, обмеженим прямими, паралельними вісям координат системи Оху. Поділимо її на прямокутні елементи $\Pi_{k,\ell} = [x_{k-1}, x_k]\times[y_{\ell-1}, y_\ell]$ прямими

$$x = x_k,\ k = \overline{1, n_1},\ a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n_1} = b;$$

$$y = y_\ell, \ell = \overline{1, n_2},\ c = y_0 < y_1 < y_2 < \ldots < y_{n_2} = d.$$

Позначимо

$$H_{i,j}(x) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{r=0}^{m-j-1} \frac{1}{r!\,j!}\left[\frac{(x-x_i)^m}{\omega(x)}\right]^{(r)}_{x=x_i} \frac{\omega(x)}{(x-x_i)^{m-j-r}}, & x_{k-1} \le x \le x_k \\ 0, & x < x_{k-1}, x > x_k \end{cases}, \quad (3)$$

$$\omega(x) = (x-x_{k-1})^m (x-x_k)^m,\quad i = k-1, k;\ j = \overline{0, m-1};$$

аналогічно

$$h_{p,q}(y) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{s=0}^{m-q-1} \frac{1}{s!\,q!}\left[\frac{(y-y_p)^m}{\omega(y)}\right]^{(s)}_{y=y_p} \frac{\omega(y)}{(y-y_p)^{m-q-s}}, & y_{\ell-1} \le y \le y_\ell \\ 0, & y < y_{\ell-1}, y > y_\ell \end{cases} \quad (4)$$

$$\omega(y) = (y-y_{\ell-1})^m (y-y_\ell)^m,\quad p = \ell-1, \ell;\ q = \overline{0, m-1};$$

$$\phi_{q,j}(x)=\left.\frac{\partial^j u}{\partial y^j}\right|_{y=y_q},\ \psi_{p,i}(y)=\left.\frac{\partial^i u}{\partial x^i}\right|_{x=x_p},q=\overline{0,n_2},p=\overline{0,n_1},\ i,j=\overline{0,m-1};$$

$$u_{pqij}=\left.\frac{\partial^{i+j}u}{\partial x^i\partial y^j}\right|_{(x_p,y_q)}$$

і розв’язок $u(x,y)$ задачі (1)–(2) у прямокутнику $\Pi_{k,\ell}$ будемо шукати у вигляді

$$u(x,y)=u_{k,l}(x,y)=\sum_{p=k-1}^{k}\sum_{r=0}^{m-1}H_{p,r}(x)\psi_{p,r}(y)+\sum_{q=\ell-1}^{\ell}\sum_{s=0}^{m-1}h_{q,s}(y)\phi_{q,s}(x)-$$

$$-\sum_{p=k-1}^{k}\sum_{q=\ell-1}^{\ell}\sum_{r=0}^{m-1}\sum_{s=0}^{m-1}u_{pqrs}H_{p,r}(x)h_{q,s}(y)\ (x,y)\in\Pi_{k,\ell}. \qquad (5)$$

Зазначимо, що функції $H_{p,r(x)}$, $h_{q,s}(y)$, що визначаються рівностями (3)–(4), задовольняють наступні умови

$$H^{(s)}_{p,r}(x_t)=\delta_{p,t}\delta_{s,r},\ h^{(s)}_{p,r}(y_t)=\delta_{p,t}\delta_{s,r}\quad ;\ 0\le r,s\le m-1 \qquad (6)$$

(δ_{ij} – символ Кронекера**).**

Оскільки $\phi_{q,s}(x)$ та $\psi_{p,r}(y)$ є слідами шуканого розв’язку та його немішаних похідних до $m-1$ порядку на вузлових лініях $x=x_p$ $(p=\overline{0,n_1})$**,** $y=y_q$ $(q=\overline{0,n_2})$**,** а сталі u_{pqij} $(p=\overline{0,n_1},\ q=\overline{0,n_2},\ i,j=\overline{0,m-1})$ є значеннями шуканого розв’язку та його частинних похідних у вузлових точках, то повинні виконуватися умови С.М. Нікольского (умови спряження):

$$\phi^{(r)}_{q,s}(x_p)=\psi^{(s)}_{p,r}(y_q)=u_{pqrs}=u^{(r,s)}(x_p,y_q),\ 0\le r,s\le m-1.$$

Безпосередньою перевіркою встановлюємо, що, з урахуванням (3)–(6), функція $u_{k,l}(x,y)$ $(k=\overline{1,n_1},\ l=\overline{1,n_2})$ задовольняє умови

$$\left.u^{(p)}_{k,l}(x,y)\right|_{x=x_i}=\psi_{i,p}(y),\ i=\overrightarrow{k-1,k},\ p=\overline{0,m-1};$$

$$\left.u^{(q)}_{k,\ell}(x,y)\right|_{y=y_j}=\phi_{j,q}(x),\ j=\overrightarrow{\ell-1,\ell},\ q=\overline{0,m-1}\,\mathbf{.}$$

Тоді функція

$$u(x,y)=u_{k,l}(x,y),\ (x,y)\in\Pi_{k,l},\ \bigcup_{k,l}\Pi_{k,l}=\Omega$$

задовольняє умови (2) і є розв’язком рівняння (1), якщо

$$f(x,y)=L_{2m}u_{k,l}(x,y),\ (x,y)\in\Pi_{k,l},\ \bigcup_{k,l}\Pi_{k,l}=\Omega$$

Зазначимо, що цей розв’язок належить простору $C^{m-1,m-1}(\Omega)$.

Слід відзначити, що при побудові точного розв'язку за формулою (5) виникає питання вибору функцій $\phi_{q,s}(x)$ та $\psi_{p,r}(y)$ і сталих u_{pqrs}, які повинні бути пов'язані між собою умовами узгодженості у точках перетину ліній ректангуляції незалежно від їх значень в інших точках і від вибору сталих u_{pqrs}. Таким чином, замінюючи функції $\phi_{q,s}(x)$ та $\psi_{p,r}(y)$ відповідними сплайн–інтерполяційними операторами та вибираючи певним чином сталі u_{pqrs}, отримуємо один з можливих алгоритмів побудови точного розв'язку, який належатиме потрібному класу диференційованості.

Чисельна реалізація.

1. Даний метод може бути узагальнений на випадок неоднорідних граничних умов .

2. Щоб побудувати розв'язок, який належав би до класу $C^{1,1}(\Omega)$, треба використовувати сплайн–інтерлінацію із застосуванням кубічних сплайнів класу C^1 або C^2 .

3. Невідомі сліди на лініях ректангуляції вибираються довільним чином із врахуванням лише умов спряження (умов Нікольського) на перетині прямих ректангуляції. При цьому параметри у вузлових точках (точках перетину прямих ректангуляції) вважаються довільними і за допомогою їх вибору можна спростити вигляд розв'язку.

4. Після побудови точного розв'язку згідно із запропонованим алгоритмом, до нього в кожному прямокутному елементі розбиття можна додати вираз $C_{i,j}\left[(x-x_i)(x-x_{i+1})(y-y_j)(y-y_{j+1})\right]^2$, в якому значення $C_{i,j}$ дозволять змінювати властивості точного розв'язку в усій області, не змінюючи клас диференційованості.

Для ілюстрації запропонованого методу наведемо наступні приклади.

Приклад 1. Знайдемо точний розв'язок рівняння

$$\Delta u = f(x,y), \quad (x,y)\in\Omega , \tag{7}$$

що задовольняє умову

$$u(x,y)\big|_{\partial\Omega} = 0 \ ; \tag{8}$$

$$\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3 ,$$

$$\Omega_1 = \{(x,y) \,|\, x_0 \le x \le x_1, y_0 \le y \le y_2\} ,$$

$$\Omega_2 = \{(x,y) \,|\, x_1 \le x \le x_2, y_0 \le y \le y_1\} ,$$

$$\Omega_3 = \{(x,y) \,|\, x_2 \le x \le x_3, y_0 \le y \le y_2\} .$$

Згідно з запропонованим методом розіб'ємо область Ω («швеллер») на п'ять прямокутників**:**

$$\Pi_{1,1} = \{(x,y) \,|\, x_0 \le x \le x_1, y_0 \le y \le y_1\} ,$$

$$\Pi_{2,1} = \{(x,y) \,|\, x_1 \le x \le x_2, y_0 \le y \le y_1\} ,$$

$$\Pi_{3,1} = \{(x,y) \,|\, x_2 \le x \le x_3, y_0 \le y \le y_1\} ,$$

$$\Pi_{1,2}=\{(x,y)\,|\,x_0\le x\le x_1, y_1\le y\le y_2\},$$
$$\Pi_{3,2}=\{(x,y)\,|\,x_2\le x\le x_3, y_1\le y\le y_2\}$$

і в кожному з них запишемо розв'язок задачі (7)–(8):

$$u(x,y)=u_{1,1}(x,y)=\sum_{k=0}^{1}\sum_{p=0}^{1}\phi_{k,p}(x)h_{k,p}(y)+\sum_{\ell=0}^{1}\sum_{q=0}^{1}\psi_{\ell,q}(y)H_{\ell,q}(x)-$$
$$-\sum_{k=0}^{1}\sum_{p=0}^{1}\sum_{\ell=0}^{1}\sum_{q=0}^{1}u^{(q,p)}(x_\ell,y_k)H_{\ell,q}(x)h_{k,p}(y),$$
$$u(x,y)=u_{2,1}(x,y)=\sum_{k=0}^{1}\sum_{p=0}^{1}\phi_{k,p}(x)h_{k,p}(y)+\sum_{\ell=1}^{2}\sum_{q=0}^{1}\psi_{\ell,q}(y)H_{\ell,q}(x)-$$
$$-\sum_{k=0}^{1}\sum_{p=0}^{1}\sum_{\ell=1}^{2}\sum_{q=0}^{1}u^{(q,p)}(x_\ell,y_k)H_{\ell,q}(x)h_{k,p}(y),$$
$$u(x,y)=u_{3,1}(x,y)=\sum_{k=0}^{1}\sum_{p=0}^{1}\phi_{k,p}(x)h_{k,p}(y)+\sum_{\ell=2}^{3}\sum_{q=0}^{1}\psi_{\ell,q}(y)H_{\ell,q}(x)-$$
$$-\sum_{k=0}^{1}\sum_{p=0}^{1}\sum_{\ell=2}^{3}\sum_{q=0}^{1}u^{(q,p)}(x_\ell,y_k)H_{\ell,q}(x)h_{k,p}(y),$$
$$u(x,y)=u_{1,2}(x,y)=\sum_{k=1}^{2}\sum_{p=0}^{1}\phi_{k,p}(x)h_{k,p}(y)+\sum_{\ell=0}^{1}\sum_{q=0}^{1}\psi_{\ell,q}(y)H_{\ell,q}(x)-$$
$$-\sum_{k=1}^{2}\sum_{p=0}^{1}\sum_{\ell=0}^{1}\sum_{q=0}^{1}u^{(q,p)}(x_\ell,y_k)H_{\ell,q}(x)h_{k,p}(y),$$
$$u(x,y)=u_{3,2}(x,y)=\sum_{k=1}^{2}\sum_{p=0}^{1}\phi_{k,p}(x)h_{k,p}(y)+\sum_{\ell=2}^{3}\sum_{q=0}^{1}\psi_{\ell,q}(y)H_{\ell,q}(x)-$$
$$-\sum_{k=1}^{2}\sum_{p=0}^{1}\sum_{\ell=2}^{3}\sum_{q=0}^{1}u^{(q,p)}(x_\ell,y_k)H_{\ell,q}(x)h_{k,p}(y).$$

Функція $u(x,y)=\begin{cases}u_{1,1}(x,y), & (x,y)\in\Pi_{1,1}\\ u_{2,1}(x,y), & (x,y)\in\Pi_{2,1}\\ u_{3,1}(x,y), & (x,y)\in\Pi_{3,1}\\ u_{1,2}(x,y), & (x,y)\in\Pi_{1,2}\\ u_{3,2}(x,y), & (x,y)\in\Pi_{3,2}\end{cases}$

належить класу $C^1(\Omega)$ і є точним розв'язком задачі (7)–(8) при правій частині $f(x,y)=\Delta u(x,y)\in L_2(\Omega)$. На рис.1 наведено графік отриманого запропонованим методом точного розв'язку задачі (7)–(8).

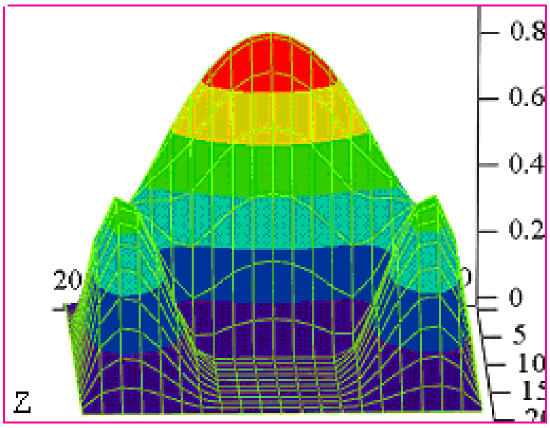

Рис. 1. Графічне зображення точного розв’язку (Приклад 1)

Безпосередніми обчисленнями перевіряємо виконання граничної умови та умов спряження на лініях $x = x_1$, $x = x_2$, $y = y_1$, які забезпечують неперервність самої функції $u(x, y)$ та її частинних похідних першого порядку, при умові, що неперервні і диференційовні функції $\phi_{k,p}(x)$ та $\psi_{\ell,q}(y)$, $k = \overline{0,2}, \ell = \overline{0,3},\ p,q = \overline{0,1}$ які можна взяти у вигляді кубічних ермітових сплайнів.

Приклад 2. Знайдемо точний розв’язок задачі (7) – (8) за умови, що область $\Omega = \Omega_1 \bigcup \Omega_2 \bigcup \Omega_3$,

$$\Omega_1 = \{(x, y) | x_0 \le x \le x_1, y_0 \le y \le y_2\},$$

$$\Omega_2 = \{(x, y) | x_1 \le x \le x_2, y_1 \le y \le y_2\},$$

$$\Omega_3 = \{(x, y) | x_2 \le x \le x_3, y_1 \le y \le y_3\}$$

являє собою Z–профіль**.**

Аналогічно попередньому розіб’ємо область Ω на п’ять прямокутників

$$\Pi_{1,1} = \{(x, y) | x_0 \le x \le x_1, y_0 \le y \le y_1\}$$

$$\Pi_{1,2} = \{(x, y) | x_0 \le x \le x_1, y_1 \le y \le y_2\},$$

$$\Pi_{2,2} = \{(x, y) | x_1 \le x \le x_2, y_1 \le y \le y_2\},$$

$$\Pi_{3,2} = \{(x, y) | x_2 \le x \le x_3, y_1 \le y \le y_2\},$$

$$\Pi_{3,3} = \{(x, y) | x_2 \le x \le x_3, y_2 \le y \le y_3\}$$

і в кожному з них запишемо розв’язок задачі у вигляді

$$u(x, y) = u_{1,1}(x, y) = \sum_{k=0}^{1}\sum_{p=0}^{1}\phi_{k,p}(x)h_{k,p}(y) + + \sum_{\ell=0}^{1}\sum_{q=0}^{1}\psi_{\ell,q}(y)H_{\ell,q}(x) -$$

$$-\sum_{k=0}^{1}\sum_{p=0}^{1}\sum_{\ell=0}^{1}\sum_{q=0}^{1}u^{(q,p)}(x_\ell,y_k)H_{\ell,q}(x)h_{k,p}(y)\,,$$

$$u(x,y)=u_{1,2}(x,y)=\sum_{k=1}^{2}\sum_{p=0}^{1}\phi_{k,p}(x)h_{k,p}(y)+\sum_{\ell=0}^{1}\sum_{q=0}^{1}\psi_{\ell,q}(y)H_{\ell,q}(x)-$$

$$-\sum_{k=1}^{2}\sum_{p=0}^{1}\sum_{\ell=0}^{1}\sum_{q=0}^{1}u^{(q,p)}(x_\ell,y_k)H_{\ell,q}(x)h_{k,p}(y)\,,$$

$$u(x,y)=u_{2,2}(x,y)=\sum_{k=1}^{2}\sum_{p=0}^{1}\phi_{k,p}(x)h_{k,p}(y)+\sum_{\ell=1}^{2}\sum_{q=0}^{1}\psi_{\ell,q}(y)H_{\ell,q}(x)-$$

$$-\sum_{k=1}^{2}\sum_{p=0}^{1}\sum_{\ell=1}^{2}\sum_{q=0}^{1}u^{(q,p)}(x_\ell,y_k)H_{\ell,q}(x)h_{k,p}(y)\,,$$

$$u(x,y)=u_{3,2}(x,y)=\sum_{k=1}^{2}\sum_{p=0}^{1}\phi_{k,p}(x)h_{k,p}(y)+\sum_{\ell=2}^{3}\sum_{q=0}^{1}\psi_{\ell,q}(y)H_{\ell,q}(x)-$$

$$-\sum_{k=1}^{2}\sum_{p=0}^{1}\sum_{\ell=2}^{3}\sum_{q=0}^{1}u^{(q,p)}(x_\ell,y_k)H_{\ell,q}(x)h_{k,p}(y)\,,$$

$$u(x,y)=u_{3,3}(x,y)=\sum_{k=2}^{3}\sum_{p=0}^{1}\phi_{k,p}(x)h_{k,p}(y)+\sum_{\ell=2}^{3}\sum_{q=0}^{1}\psi_{\ell,q}(y)H_{\ell,q}(x)-$$

$$-\sum_{k=2}^{3}\sum_{p=0}^{1}\sum_{\ell=2}^{3}\sum_{q=0}^{1}u^{(q,p)}(x_\ell,y_k)H_{\ell,q}(x)h_{k,p}(y)\,.$$

Функція

$$u(x,y)=\begin{cases}u_{1,1}(x,y), & (x,y)\in\Pi_{1,1}\\ u_{1,2}(x,y), & (x,y)\in\Pi_{1,2}\\ u_{2,2}(x,y), & (x,y)\in\Pi_{2,2}\\ u_{3,2}(x,y), & (x,y)\in\Pi_{3,2}\\ u_{3,3}(x,y), & (x,y)\in\Pi_{3,3}\end{cases}\qquad(9)$$

належить класу $C^1(\Omega)$ і є точним розв'язком задачі, що розглядається, при правій частині $f(x,y)=\Delta u(x,y)\in L_2(\Omega)$, де $u(x,y)$ визначається формулою (9); на рис.2 наведено її графік.

Безпосередніми обчисленнями перевіряємо виконання граничної умови та умов спряження на лініях $x=x_1,\ x=x_2,\ y=y_1, y=y_2$, які забезпечують неперервність самої функції $u(x,y)$ та її частинних похідних першого порядку, при умові, що неперервні і диференційовні функції $\phi_{k,p}(x),\psi_{\ell,q}(y), k,\ell=\overline{0,3}, p,q=\overline{0,1}$.

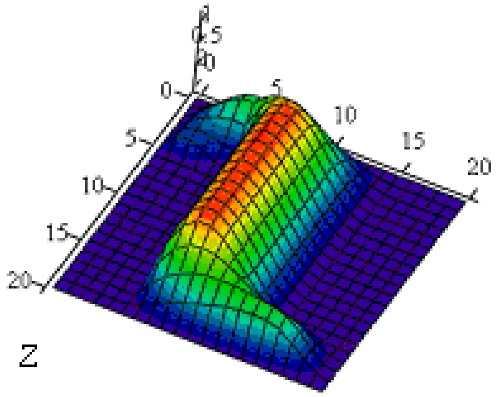

Рис. 2. Графічне зображення точного розв'язку (Приклад 2)

Висновок. Таким чином, запропонований в роботі метод отримання точних розв'язків крайових задач дозволяє отримувати точні розв'язки, які належать до класу $C^1(\Omega)$ і мають розривні другі похідні (не мішані) на лініях – сторонах сусідніх прямокутних елементів. В результаті права частина такої крайової задачі $f(x,y)$ буде мати розриви першого роду між елементами, тобто цей точний розв'язок належить класу $W_2^1(\overline{\Omega})$. Але ідея запропонованого методу дозволяє будувати точні розв'язки, які належать класу $C^r(\overline{\Omega})$ для випадку, коли $r \geq 2$. Реалізації цих випадків будуть присвячені наступні праці авторів.

ЛІТЕРАТУРА

1. Литвин О.М., Лобанова Л.С. Про один метод побудови точних розв'язків крайової задачі для диференціального рівняння еліптичного типу в областях складної форми // Доповіді НАНУ. – 2011. – №7. – С.37–41.
2. Рвачев В. Л. Геометрические приложения алгебры логики. – Киев: Техніка, 1967. – 212 с.
3. Рвачев В. Л. К вопросу о построении координатных последовательностей // Дифференц. уравнения. – 1970. – № 6. – С. 1034–1047.
4. Рвачев В. Л. Теория R–функций и некоторые ее приложения. – Киев: Наук. думка, 1982. – 566 с.
5. Литвин О.М. Інтерлінація та інтерфлетація функцій і структурний метод В. Л. Рвачова. Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2007. – т.50, №4. – С.1–22.
6. Литвин О.М. Інтерлінація функцій та деякі її застосування. Монографія. Харків: Основа, 2002. – 544 с.