3 D КОЕФІЦІЄНТИ ФУР'Є ТА ІНТЕРФЛЕТАЦІЯ ФУНКЦІЙ

Литвин О. М., Нечуйвітер О.П.

Українська інженерно-педагогічна академія, Харків, Україна

Сучасні задачі цифрової обробки сигналів вимагають розв’язку за допомогою інформаційних операторів різних типів. Це пов’язане з тим, що в якості даних можуть бути значення функції у вузлових точках, сліди функції на лініях або площинах. Ефективним у вирішені таких задач став апарат інтерлінації та інтерфлетації функцій [1]. Перші результати обчислення 2 D коефіцієнтів Фур'є з використанням інтерлінації функцій у випадку, коли інформація про неосцилюючий множник підінтегральної функції задана у вузлах, викладені в [2]. З основними результатами за цією тематикою можна ознайомитися в [3]. В [4]–[5] наведені результати обчислення 2 D коефіцієнтів Фур'є у випадку, коли інформація про неосцилюючий множник підінтегральної функції задана її слідами на лініях.

Наближене обчислення 3 D коефіцієнтів Фур'є кубатурними формулами з використанням інтерфлетації функції (випадок, коли інформація про функцію задана в точках) викладене в [6]. Обчислення багатовимірних коефіцієнтів Фур'є також розглядається і в [7]–[9] однак з точки зору швидкої апроксимації, а не з точки зору нових інформаційних операторів. Питання ж побудови кубатурних формул обчислення 3 D коефіцієнтів Фур'є у випадку, коли інформація про неосцилюючий множник підінтегральної функції задана слідами на взаємноперпендикулярних лініях не було досліджене.

Метою даної роботи є представлення та дослідження кубатурних формул наближеного обчислення 3 D коефіцієнтів Фур'є

$$I_1^3(m,n,p)=\int_0^1\int_0^1\int_0^1 f(x,y,z)\sin 2\pi mx \sin 2\pi ny \sin 2\pi pz dxdydz,$$

$$I_2^3(m,n,p)=\int_0^1\int_0^1\int_0^1 f(x,y,z)\cos 2\pi mx \cos 2\pi ny \cos 2\pi pz dxdydz,$$

$$I_3^3(m,n,p)=\int_0^1\int_0^1\int_0^1 f(x,y,z)e^{-i2\pi mx}e^{-i2\pi ny}e^{-i2\pi pz}dxdydz,$$

у випадку, коли в якості даних задані сліди функції $f(x,y,z)$ на взаємноперпендикулярних лініях на класі дійсних функцій трьох змінних, визначених на $G=[0,1]^3$ і таких, що, $\left|f^{(r,r,0)}(x,y,z)\right|\le \bar{M}$,

$$\left|f^{(r,0,r)}(x,y,z)\right|\le \bar{M},\quad \left|f^{(0,r,r)}(x,y,z)\right|\le \bar{M},\quad \left|f^{(r,r,r)}(x,y,z)\right|\le \tilde{M},\ r=1,2.$$

Отримати оцінку похибки наближення запропонованих кубатурних формул.

1. Оператори сплайн–інтерлінації та сплайн–інтерфлетації. Введемо позначення

$$h_{10}(x)=\begin{cases}\dfrac{x-x_1}{-\Delta}, & x_0\le x<x_1,\\ 0, & x\ge x_1,\end{cases}\qquad h_{1\ell}(x)=\begin{cases}0, & x\le x_{\ell-1},\\ \dfrac{x-x_\ell}{\Delta}, & x_{\ell-1}<x\le x_\ell,\end{cases}$$

$$h_{1k}(x)=\begin{cases}0, & x\le x_{k-1},\\ \dfrac{x-x_k}{\Delta}, & x_{k-1}<x<x_k,\\ \dfrac{x-x_{k+1}}{-\Delta}, & x_k\le x<x_{k+1},\\ 0, & x\ge x_{k+1},\end{cases}\qquad k=\overline{1,\ell-1},\quad x_k=k\Delta,\quad \Delta=\frac{1}{\ell},$$

$$\tilde{h}_{10}(x)=\begin{cases}\dfrac{x-\tilde{x}_1}{-\Delta_1}, & \tilde{x}_0\le x<\tilde{x}_1,\\ 0, & x\ge \tilde{x}_1,\end{cases}\qquad \tilde{h}_{1\ell^{3/2}}(x)=\begin{cases}0, & x\le \tilde{x}_{\ell^{3/2}-1},\\ \dfrac{x-x_\ell}{\Delta}, & \tilde{x}_{\ell^{3/2}-1}<x\le \tilde{x}_{\ell^{3/2}},\end{cases}$$

$$\tilde{h}_{1\tilde{k}}(x)=\begin{cases}0, & x\le \tilde{x}_{\tilde{k}-1},\\ \dfrac{x-\tilde{x}_{\tilde{k}}}{\Delta_1}, & \tilde{x}_{\tilde{k}-1}<x<\tilde{x}_{\tilde{k}},\\ \dfrac{x-\tilde{x}_{\tilde{k}+1}}{-\Delta_1}, & \tilde{x}_{\tilde{k}}\le x<\tilde{x}_{\tilde{k}+1},\\ 0, & x\ge \tilde{x}_{\tilde{k}+1},\end{cases}$$

$$\tilde{k}=\overline{1,\ell^{3/2}-1},\quad \tilde{x}_{\tilde{k}}=\tilde{k}\Delta_1,\qquad \Delta_1=\frac{1}{\ell^{3/2}}.$$

Аналогічно визначаються функції

1. $h_{2j}(y),\quad j=\overline{0,\ell},\quad h_{3s}(z),\quad s=\overline{0,\ell},\quad y_j=j\Delta,\quad z_s=s\Delta,\quad \Delta=\dfrac{1}{\ell}$;
2. $\tilde{h}_{2\tilde{j}}(y)\quad \tilde{j}=\overline{0,\ell^{3/2}},\ \ \tilde{h}_{3\tilde{s}}(z)\quad \tilde{s}=\overline{0,\ell^{3/2}},\ \ \tilde{y}_{\tilde{j}}=\tilde{j}\Delta_1,\ \ \tilde{z}_{\tilde{s}}=\tilde{j}\Delta_1,\ \ \Delta_1=\dfrac{1}{\ell^{3/2}}$.

Розглянемо оператори

$$O_1f(x,y,z)=\sum_{k=0}^{\ell}f(x_k,y,z)h_{1k}(x)\quad,\ O_2f(x,y,z)=\sum_{j=0}^{\ell}f(x,y_j,z)h_{2j}(y)\quad,$$

$$O_3f(x,y,z)=\sum_{s=0}^{\ell}f(x,y,z_s)h_{3s}(z)\,,$$

$$\tilde{O}_1f(x,y,z)=\sum_{\tilde{k}=0}^{\ell^{3/2}}f(\tilde{x}_{\tilde{k}},y,z)h_{1\tilde{k}}(x)\quad,\ \tilde{O}_2\,f(x,y,z)=\sum_{\tilde{j}=0}^{\ell^{3/2}}f(x,\tilde{y}_{\tilde{j}},z)\tilde{h}_{2\tilde{j}}(y)\quad,$$

$$\tilde{O}_3f(x,y,z)=\sum_{\tilde{s}=0}^{\ell^{3/2}}f(x,y,\tilde{z}_{\tilde{s}})\tilde{h}_{3\tilde{s}}(z)\,.$$

Означення. Під слідом функції $f(x,y,z)$ на лініях розуміємо

$$f(x_k,y_j,z),\quad 0\le z\le 1,\ f(x_k,y,z_s),\ 0\le y\le 1,\ f(x,y_j,z_s),\ 0\le x\le 1.$$

Лема 1. [1] *Оператор сплайн–інтерфлетації*

$$Of(x,y,z)=O_1f(x,y,z)+O_2f(x,y,z)+O_3f(x,y,z)-$$
$$-O_1O_2f(x,y,z)-O_2O_3f(x,y,z)-O_1O_3f(x,y,z)+O_1O_2O_3f(x,y,z)$$

має властивість $\left|f(x,y,z)-Of(x,y,z)\right|=O\left(\frac{1}{\ell^{3r}}\right)$.

Лема 2. [1] *Оператор сплайн–інтерлінації, побудований на основі інтерфлетації*

$$\tilde{O}f(x,y,z)=O_1\tilde{O}_2f(x,y,z)+O_1\tilde{O}_3f(x,y,z)-$$
$$-O_1\tilde{O}_2\tilde{O}_3f(x,y,z)+O_2\tilde{O}_1f(x,y,z)+O_2\tilde{O}_3f(x,y,z)-$$
$$-O_2\tilde{O}_1\tilde{O}_3f(x,y,z)+O_3\tilde{O}_1f(x,y,z)+O_3\tilde{O}_2f(x,y,z)-O_3\tilde{O}_1\tilde{O}_2f(x,y,z)-$$
$$-O_1O_2f(x,y,z)-O_1O_3f(x,y,z)-O_2O_3f(x,y,z)+O_1O_2O_3f(x,y,z)$$

має властивість $\left|f(x,y,z)-\tilde{O}f(x,y,z)\right|=O\left(\frac{1}{\ell^{3r}}\right)$.

Нехай

$$G_{1k}(x,\xi,r)=\begin{cases}\dfrac{x_{k+1}-x}{x_{k+1}-x_k}\dfrac{(x_k-\xi)^{r-1}}{(r-1)!}, & x_k<\xi<x,\\[2ex] \dfrac{x_k-x}{x_{k+1}-x_k}\dfrac{(x_{k+1}-\xi)^{r-1}}{(r-1)!}, & x<\xi<x_{k+1},\end{cases}$$

$$\tilde{G}_{1\tilde{k}}(x,\xi,r)=\begin{cases}\dfrac{\tilde{x}_{\tilde{k}+1}-x}{\tilde{x}_{\tilde{k}+1}-\tilde{x}_{\tilde{k}}}\dfrac{(\tilde{x}_{\tilde{k}}-\xi)^{r-1}}{(r-1)!}, & \tilde{x}_{\tilde{k}}<\xi<x,\\[2ex] \dfrac{\tilde{x}_{\tilde{k}}-x}{\tilde{x}_{\tilde{k}+1}-\tilde{x}_{\tilde{k}}}\dfrac{(x_{k+1}-\xi)^{r-1}}{(r-1)!}, & x<\xi<\tilde{x}_{\tilde{k}+1},\end{cases}$$

а функції $G_{2j}(y,\eta,r)$, $\tilde{G}_{2\tilde{j}}(y,\eta,r)$, $G_{3s}(z,\varsigma,r)$, $\tilde{G}_{3\tilde{s}}(z,\varsigma,r)$, $r=1,2$ визначаються аналогічно.

Лема 4. [1] *Справедливі наступні рівності*

$$f(x,y,z)-Of(x,y,z)=$$
$$\int_{x_k}^{x_{k+1}}\int_{y_j}^{y_{j+1}}\int_{z_s}^{z_{s+1}} f^{(r,r,r)}(\xi,\eta,\varsigma)G_{1k}(x,\xi,r)G_{2j}(y,\eta,r)G_{3s}(z,\varsigma,r)d\xi d\eta d\zeta\ ;$$

$$\left(O_1 - O_1\tilde{O}_2 - O_1\tilde{O}_3 + O_1\tilde{O}_2\tilde{O}_3\right) f(x,y,z) =$$

$$\int_{\tilde{y}_{\tilde{j}}}^{\tilde{y}_{\tilde{j}+1}} \int_{\tilde{z}_{\tilde{s}}}^{\tilde{z}_{\tilde{s}+1}} f^{(0,r,r)}(x_k,\eta,\zeta)\tilde{G}_{2_{\tilde{j}}}(y,\eta,r)\tilde{G}_{3\tilde{s}}(z,\zeta,r)d\eta d\zeta\ ;$$

Лема 5. [10] *Справедливі наступні нерівності*

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}}\int_{x_k}^{x_{k+1}} \left|G_1(x,\xi,r)\right| d\xi dx \le \frac{2\Delta^{r+1}}{(r+2)!},\ \int_{y_j}^{y_{j+1}}\int_{y_j}^{y_{j+1}} \left|G_{2j}(y,\eta,r)\right| d\eta dy \le \frac{2\Delta^{r+1}}{(r+2)!},$$

$$\int_{z_s}^{z_{s+1}}\int_{z_s}^{z_{s+1}} \left|G_{3s}(z,\varsigma,r)\right| d\varsigma dz \le \frac{2\Delta^{r+1}}{(r+2)!}.$$

2. Кубатурна формула обчислення 3 D коефіцієнтів Фур'є з використанням операторів сплайн–інтерлінації, побудованих на основі інтерфлетації. Для обчислення інтегралу $I_\mu^3(m,n,p),\ \mu = 1,2,3$ пропонуються формули:

$$\tilde{\Phi}_1^3(m,n,p) = \int_0^1\int_0^1\int_0^1 \tilde{O}f(x,y,z)\sin 2\pi mx \sin 2\pi ny \sin 2\pi pz dxdydz\ ,$$

$$\tilde{\Phi}_2^3(m,n,p) = \int_0^1\int_0^1\int_0^1 \tilde{O}f(x,y,z)\cos 2\pi mx \cos 2\pi ny \cos 2\pi pz dxdydz\ ,$$

$$\tilde{\Phi}_3^3(m,n,p) = \int_0^1\int_0^1\int_0^1 \tilde{O}f(x,y,z)e^{-i2\pi mx}e^{-i2\pi ny}e^{-i2\pi pz} dxdydz\ .$$

Теорема. *Для кубатурної формули* $\tilde{\Phi}_1^3(m,n,p)$ *обчислення* $I_1^3(m,n,p)$ *справедлива наступна оцінка:*

$$\left|I_1^3(m,n,p) - \tilde{\Phi}_1^3(m,n,p)\right| \le \left(\frac{8\tilde{M}}{\left[(r+2)!\right]^3} + \frac{12\overline{M}}{\left[(r+2)!\right]^2}\right)\frac{1}{\ell^{3r}}\ .$$

Доведення. Оцінимо похибку наближення

$$\left|I_1^3(m,n,p) - \tilde{\Phi}_1^3(m,n,p)\right| \le$$

$$\le \left|I_1^3(m,n,p) - \Phi_1^3(m,n,p)\right| + \left|\Phi_1^3(m,n,p) - \tilde{\Phi}_1^3(m,n,p)\right| \le$$

$$\le \int_0^1\int_0^1\int_0^1 \left|f(x,y,z) - Of(x,y,z)\right| dxdydz +$$

$$+ \int_0^1\int_0^1\int_0^1 \left|Of(x,y,z) - \tilde{O}f(x,y,z)\right| dxdydz =$$

$$= I_1 + I_2\ .$$

Оцінимо кожний з доданків.

$$I_1 \le \sum_{k=0}^{\ell-1}\sum_{j=0}^{\ell-1}\sum_{s=0}^{\ell-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}}\int_{y_j}^{y_{j+1}}\int_{z_s}^{z_{s+1}}\int_{x_k}^{x_{k+1}}\int_{y_j}^{y_{j+1}}\int_{z_s}^{z_{s+1}} \left|f^{(r,r,r)}(\xi,\eta,\varsigma)\right| \times$$

$$\times\left|G_{1k}(x,\xi,r)\right|\left|G_{2j}(y,\eta,r)\right|\left|G_{3s}(z,\varsigma,r)\right|d\xi d\eta d\zeta\, dxdydz \le$$

$$\le \tilde{M}\sum_{k=0}^{\ell-1}\sum_{j=0}^{\ell-1}\sum_{s=0}^{\ell-1}\ \frac{2\Delta^{r+1}}{(r+2)!}\frac{2\Delta^{r+1}}{(r+2)!}\frac{2\Delta^{r+1}}{(r+2)!}=\tilde{M}\frac{8\Delta^{3r}}{\left[(r+2)!\right]^{3}}=\frac{8\tilde{M}}{\left[(r+2)!\right]^{3}\ell^{3r}}.$$

$$I_2=\int_0^1\int_0^1\int_0^1\ \left|O_1 f(x,y,z)+O_2 f(x,y,z)+O_3 f(x,y,z)-\right.$$
$$-O_1O_2 f(x,y,z)-O_2O_3 f(x,y,z)-O_1O_3 f(x,y,z)+O_1O_2O_3 f(x,y,z)-$$
$$-O_1\tilde{O}_2 f(x,y,z)-O_1\tilde{O}_3 f(x,y,z)+O_1\tilde{O}_2\tilde{O}_3 f(x,y,z)-O_2\tilde{O}_1 f(x,y,z)-$$
$$-O_2\tilde{O}_3 f(x,y,z)+O_2\tilde{O}_1\tilde{O}_3 f(x,y,z)-O_3\tilde{O}_1 f(x,y,z)-O_3\tilde{O}_2 f(x,y,z)+$$
$$+O_3\tilde{O}_1\tilde{O}_2 f(x,y,z)+O_1O_2 f(x,y,z)+O_1O_3 f(x,y,z)+$$
$$\left.+O_2O_3 f(x,y,z)-O_1O_2O_3 f(x,y,z)\right|dxdydz=$$
$$=\int_0^1\int_0^1\int_0^1\ \left|O_1 f(x,y,z)+O_2 f(x,y,z)+O_3 f(x,y,z)-\right.$$
$$-O_1\tilde{O}_2 f(x,y,z)-O_1\tilde{O}_3 f(x,y,z)+O_1\tilde{O}_2\tilde{O}_3 f(x,y,z)-O_2\tilde{O}_1 f(x,y,z)-$$
$$-O_2\tilde{O}_3 f(x,y,z)+O_2\tilde{O}_1\tilde{O}_3 f(x,y,z)-O_3\tilde{O}_1 f(x,y,z)-$$
$$\left.-O_3\tilde{O}_2 f(x,y,z)+O_3\tilde{O}_1\tilde{O}_2 f(x,y,z)\right|dxdydz\le$$
$$=\int_0^1\int_0^1\int_0^1\ \left|\left(O_1-O_1\tilde{O}_2-O_1\tilde{O}_3+O_1\tilde{O}_2\tilde{O}_3\right)f(x,y,z)\right|dxdydz+$$
$$+\int_0^1\int_0^1\int_0^1\ \left|\left(O_2-O_2\tilde{O}_1-O_2\tilde{O}_3+O_2\tilde{O}_1\tilde{O}_3\right)f(x,y,z)\right|dxdydz+$$
$$+\int_0^1\int_0^1\int_0^1\ \left|\left(O_3-O_3\tilde{O}_1-O_3\tilde{O}_2+O_3\tilde{O}_1\tilde{O}_2\right)f(x,y,z)\right|dxdydz\le$$
$$\le\sum_{k=0}^{\ell-1}\sum_{\tilde{j}=0}^{\ell^{3/2}-1}\sum_{\tilde{s}=0}^{\ell^{3/2}-1}\ \int_{x_k}^{x_{k+1}}\int_{\tilde{y}_{\tilde{j}}}^{\tilde{y}_{\tilde{j}+1}}\int_{\tilde{z}_{\tilde{s}}}^{\tilde{z}_{\tilde{s}+1}}\ \int_{\tilde{y}_{\tilde{j}}}^{\tilde{y}_{\tilde{j}+1}}\int_{\tilde{z}_{\tilde{s}}}^{\tilde{z}_{\tilde{s}+1}}\left|f^{(0,r,r)}(x_k,\eta,\zeta)\right|\times$$
$$\times\left|\tilde{G}_{2_{\tilde{j}}}(y,\eta,r)\right|\left|\tilde{G}_{3\tilde{s}}(z,\zeta,r)\right|d\eta d\zeta\, dxdydz+$$
$$+\sum_{j=0}^{\ell-1}\sum_{\tilde{k}=0}^{\ell^{3/2}-1}\sum_{\tilde{s}=0}^{\ell^{3/2}-1}\ \int_{\tilde{x}_{\tilde{k}}}^{\tilde{x}_{\tilde{k}+1}}\int_{y_j}^{y_{j+1}}\int_{\tilde{z}_{\tilde{s}}}^{\tilde{z}_{\tilde{s}+1}}\ \int_{\tilde{x}_{\tilde{k}}}^{\tilde{x}_{\tilde{k}+1}}\int_{\tilde{z}_{\tilde{s}}}^{\tilde{z}_{\tilde{s}+1}}\ \left|f^{(r,0,r)}(\xi,y_j,\zeta)\right|\times$$
$$\times\left|\tilde{G}_{1\tilde{k}}(x,\xi,r)\right|\left|\tilde{G}_{3\tilde{s}}(z,\zeta,r)\right|d\xi d\zeta\, dxdydz+$$

$$+\sum_{s=0}^{\ell-1}\sum_{\tilde{k}=0}^{\ell^{3/2}-1}\sum_{\tilde{j}=0}^{\ell^{3/2}-1}\int_{\tilde{x}_{\tilde{k}}}^{\tilde{x}_{\tilde{k}+1}}\int_{\tilde{y}_{\tilde{j}}}^{\tilde{y}_{\tilde{j}+1}}\int_{z_s}^{z_{s+1}}\int_{\tilde{x}_{\tilde{k}}}^{\tilde{x}_{\tilde{k}+1}}\int_{\tilde{y}_{\tilde{j}}}^{\tilde{y}_{\tilde{j}+1}}\left|f^{(r,r,0)}(\xi,\eta,z_s)\right|\times$$

$$\times\left|\tilde{G}_{1\tilde{k}}(x,\xi,r)\right|\left|\tilde{G}_{2\tilde{j}}(y,\eta,r)\right|d\xi d\eta dxdydz\le$$

$$=\bar{M}\ell\Delta\ell^{3/2}\ell^{3/2}\frac{2\Delta_1^{r+1}}{(r+2)!}\frac{2\Delta_1^{r+1}}{(r+2)!}+\bar{M}\ell\Delta\ell^{3/2}\ell^{3/2}\frac{2\Delta_1^{r+1}}{(r+2)!}\frac{2\Delta_1^{r+1}}{(r+2)!}+$$

$$+\bar{M}\ell\Delta\ell^{3/2}\ell^{3/2}\frac{2\Delta_1^{r+1}}{(r+2)!}\frac{2\Delta_1^{r+1}}{(r+2)!}=$$

$$=12\bar{M}\frac{\Delta_1^{r}}{(r+2)!}\frac{\Delta_1^{r}}{(r+2)!}=\frac{12\bar{M}}{\left[(r+2)!\right]^2}\Delta_1^{2r}=$$

$$=\frac{12\bar{M}}{\left[(r+2)!\right]^2}\left(\frac{1}{\ell^{3/2}}\right)^{2r}=\frac{12\bar{M}}{\left[(r+2)!\right]^2}\frac{1}{\ell^{3r}}.$$

Отже, $\left|I_1^3(m,n,p)-\tilde{\Phi}_1^3(m,n,p)\right|\le\left(\frac{8\tilde{M}}{\left[(r+2)!\right]^3}+\frac{12\bar{M}}{\left[(r+2)!\right]^2}\right)\frac{1}{\ell^{3r}}$. Теорема доведена.

3. Чисельний експеримент. В таблиці 1 для функції $f(x,y,z)=\sin(x+y+z)$ наведені результати наближеного обчислення інтегралу $I_1^3(m,n,p)$ при різних m,n,p за кубатурною формулою $\tilde{\Phi}_1^3(m,n,p)$. Введемо позначення: $\varepsilon_1=\left|I_1^3(m,n,p)-\tilde{\Phi}_1^3(m,n,p)\right|$, $\varepsilon_2=\left(\frac{8\tilde{M}}{\left[(r+2)!\right]^3}+\frac{12\bar{M}}{\left[(r+2)!\right]^2}\right)\frac{1}{\ell^{3r}}$. При $\tilde{M}=\bar{M}=1,\quad r=2$ маємо $\varepsilon_2=0.021\cdot\frac{1}{\ell^6}$. Наведемо точні значення наближуваних інтегралів:

$$I_1^3(1,2,3)=0.000043384641833,\quad I_1^3(4,4,4)=0.000003946808581.$$

Таблиця 1. Результати обчислення інтегралу $I_1^3(m,n,p)$

m	n	p	ℓ	$\tilde{\Phi}_1^3(m,n,p)$	ε_1	ε_2
1	2	3	4	0.000043384384762	$2.5\cdot10^{-10}$	$5.1\cdot10^{-6}$
			9	0.000043384640066	$1.7\cdot10^{-12}$	$3.9\cdot10^{-8}$
			16	0.000043384641777	$5.5\cdot10^{-14}$	$1.2\cdot10^{-9}$
			25	0.000043384641829	$3.6\cdot10^{-15}$	$8.6\cdot10^{-11}$
4	4	4	9	0.000003946808415	$1.6\cdot10^{-13}$	$1.2\cdot10^{-9}$
			16	0.000003946808577	$4.9\cdot10^{-15}$	$1.2\cdot10^{-9}$

Висновки. В статті пропонуються та досліджуються кубатурні формули обчислення 3 D коефіцієнтів Фур'є з використанням операторів сплайн–інтерфлетації на класі функцій, визначених на $G = [0,1]^3$ і таких, що, $\left|f^{(r,r,0)}(x,y,z)\right| \le \bar{M}$, $\left|f^{(r,0,r)}(x,y,z)\right| \le \bar{M}$, $\left|f^{(0,r,r)}(x,y,z)\right| \le \bar{M}$, $\left|f^{(r,r,r)}(x,y,z)\right| \le \tilde{M}$, $r = 1,2$. Інформація про функцію задана слідами на системі взаємно–перпендикулярних ліній. Отримана оцінка похибки наближення.

Чисельний експеримент підтверджує теоретичні результати.

Питання якості кубатурних формул, тобто чи є побудовані кубатурні формули оптимальними або близькими до них, буде наступним етапом досліджень.

ЛІТЕРАТУРА

1. Литвин О.М. Інтерлінація функцій та деякі її застосування. – Харків.: Основа, 2002. – 544 с.

2. Литвин О.М., Нечуйвітер О.П. Кубатурна формула для обчислення коефіцієнтів Фур'є функцій $F(x,y)$ з використанням інтерлінації функцій // Волинський математичний вісник. – 1996. – Вип. 3. – С. 87–90.

3. Литвин О.М., Нечуйвітер О.П. Оптимальні за порядком точності кубатурні формули обчислення коефіцієнтів Фур'є функцій двох змінних з використанням сплайн–інтерлінації функцій. –Харків, 2009. – 136 с.

4. Литвин О.М., Нечуйвітер О.П. Оптимальна за порядком точності кубатурна формула обчислення подвійних інтегралів від швидкоосцилюючих функцій на основі сплайн–інтерлінації // Доповіді НАН України. – 2006. – N 6. – С. 9–13.

5. Lytvyn O.M., Nechuyviter O.P. Methods in the multivariate digital signal processing with using spline–interlineation // Proceeding of the IASTED International Conferences on Automation, Control, and Information Technology (ASIT 2010) (June 15 – 18 2010). – Novosibirsk. – 2010. – P.90 – 96.

6. Литвин О.М., Удовиченко В.М. Оператори фінітного тривимірного перетворення Фур'є // Радиоэлектроника и информатика. – 2004. – №4(29). – С. 130–133.

7. Iserles A., Norsett S.P. From high oscillation to rapid approximation I: Modified Fourier expansions, *Technical Report NA2006/05, DAMPT,* – University of Cambridge, 2006.

8. Iserles A., Norsett S.P. From high oscillation to rapid approximation II: Expansions in polyharmonic eigenfunctions, *Technical Report NA2006/05, DAMPT*, – University of Cambridge, 2006.

9. Iserles A., Norsett S.P. From high oscillation to rapid approximation III: Multivariate expansions, *Technical Report NA2007/01, DAMPT,* – University of Cambridge, 2007.

10. Литвин О.М., Нечуйвітер О.П. Кубатурна формула для обчислення 2 D коефіцієнтів Фур'є з використанням інтерлінації функцій // Вісник Харківського національного університету ім. В.Н. Каразіна. Сер.: «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління». – 2010. – № 926. – С. 153–160.