ПОБУДОВА РОЗРИВНИХ ІНТЕРЛІНАЦІЙНИХ СПЛАЙНІВ ДЛЯ НАБЛИЖЕННЯ РОЗРИВНИХ ФУНКЦІЙ З ДВОВИМІРНОЮ РЕКТАНГУЛЬОВАНОЮ ОБЛАСТЮ ВИЗНАЧЕННЯ

Литвин О.М., Першина Ю.І.

Українська інженерно-педагогічна академія, м. Харків, Україна

На даний час основна увага в теорії наближення функцій багатьох змінних сплайнами приділена наближенню неперервних і диференційованих функцій неперервними та диференційованими сплай–нами [1] – [3]. В той же час практика показує, що серед багатовимірних об'єктів, які потрібно досліджувати, значно більша їх кількість описується розривними функціями. Наприклад, в методах комп'ютерної томографії на даний час ніде не використовується інформація про внутрішню структуру тіла людини (шлунок має одну форму і відповідну щільність його тканин, печінка має іншу форму та іншу щільність його тканин, підшлункова залоза має свою форму та щільність тканин, хребет має свою щільність тощо).

В роботі [4] запропоновано використовувати для більш точного опису внутрішньої структури 3D тіла апріорну інформацію про його частини за допомогою відповідних функцій трьох змінних, які входять у рівняння $W_k(x,y,z)=0,\ k=\overline{1,M},$ що описують M – кількість об'єктів внутрішньої структури тіла з метою більш якісного їх відновлення методами комп'ютерної томографії. Тобто в цьому методі пропонується використовувати інформацію про внутрішню структуру тіла у вигляді розривної функції трьох змінних, яка має розриви в точках поверхонь, що відділяють сусідні підобласті.

Весь розвиток обчислювальної та прикладної математики говорить про те, що використання кожної додаткової інформації про досліджуваний об'єкт може привести до більш точного і якісного відновлення цього об'єкту. Наприклад, в роботі [5] пропонується використовувати рівняння поверхні черепа людини і, таким чином, більш точно відновлювати внутрішню структур тіла.

Крім того, наведемо наступний приклад. В механіці твердого тіла однією із складних задач є задача дослідження тріщин у внутрішніх точках тіла, тобто таких включень у внутрішніх точках тіла , в яких відсутній матеріал, з якого складається тіло. Можна сказати, що таке тіло має щільність, яка є розривною: за межами тріщини одна щільність, в області, обмеженою стінками тріщини – інша щільність.

Тобто актуальною є розробка та дослідження теорії наближення розривних функцій за допомогою розривних функцій.

В статті [6] авторами були побудовані розривні лінійні інтерполяційні сплайни для наближення функцій однієї змінної, що може мати розриви першого роду. В роботі [7] був запропонований метод наближення розривних функцій двох змінних розривними інтерполяційними білінійними сплайнами. В даній роботі будуються та досліджуються розривні інтерполяційні сплайни для наближення розривних функцій двох змінних, область визначення яких розбивається на прямокутники.

Побудова розривного інтерлінаційного сплайну. В даній роботі будемо припускати, що область розбивається прямими $x_0 = 0 < x_1 < x_2 < ... < x_m = 1$, $y_0 = 0 < y_1 < y_2 < ... < y_n = 1$ на прямокутні елементи.

Розглянемо елемент $\Pi_{ij} = (x_{i-1}, x_i) \times (y_{j-1}, y_j), i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}$. На границях цього елементу задані сліди:

$$\varphi 1_i^-(y) = \lim_{x \to x_i - 0} f(x,y), \qquad \varphi 1_{i-1}^+(y) = \lim_{x \to x_i + 0} f(x,y),$$

$$\phi 2_j^-(x) = \lim_{y \to y_j - 0} f(x,y), \qquad \phi 2_{j-1}^+(x) = \lim_{y \to y_j + 0} f(x,y).$$

Означення. Будемо називати розривним інтерлінаційним поліноміальним сплайном в області D відповідним заданому розбиттю на підобласті Π_{ij} наступну функцію:

$$S(x,y) = S_{ij}(x,y),\ (x,y) \in \Pi_{ij},$$

$$S_{ij}(x,y) = S1_{ij}(x,y) + S2_{ij}(x,y) - S12_{ij}(x,y), \qquad (x,y) \in \Pi_{ij} \subset D, \tag{1}$$

$$S1_{ij}(x,y) = \varphi 1^+{}_{i-1}(y) \cdot \frac{x - x_i}{x_{i-1} - x_i} + \varphi 1^-{}_i(y) \cdot \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}};$$

$$S2_{ij}(x,y) = \varphi 2^+{}_{j-1}(x) \cdot \frac{y - y_j}{y_{j-1} - y_j} + \varphi 2^-{}_j(x) \cdot \frac{y - y_{j-1}}{y_j - y_{j-1}};$$

$$S12_{ij}(x,y) = C^{++}_{i-1,j-1} \frac{x - x_i}{x_{i-1} - x_i} \frac{y - y_j}{y_{j-1} - y_j} + C^{+-}_{i-1,j} \frac{x - x_i}{x_{i-1} - x_i} \frac{y - y_{j-1}}{y_j - y_{j-1}} +$$

$$+ C^{-+}_{i,j-1} \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \frac{y - y_j}{y_{j-1} - y_j} + C^{--}_{i,j} \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \frac{y - y_{j-1}}{y_j - y_{j-1}};$$

де

$$C^{++}_{i-1j-1} = \lim_{\substack{x \to x_{i-1}+0 \\ y \to y_{j-1}+0}} f(x,y), \qquad C^{+-}_{i-1j} = \lim_{\substack{x \to x_{i-1}+0 \\ y \to y_j - 0}} f(x,y),$$

$$C^{-+}_{ij-1} = \lim_{\substack{x \to x_i - 0 \\ y \to y_{j-1}+0}} f(x,y), \qquad C^{--}_{ij} = \lim_{\substack{x \to x_i - 0 \\ y \to y_j - 0}} f(x,y).$$

Теорема 1. *Якщо*

$$\varphi 1_i^-(y_{j-1}) = \varphi 2_{j-1}^-(x_i) = C^{-+}_{ij-1},$$

$$\varphi 1_{i-1}^+(y_{j-1}) = \varphi 2_{j-1}^+(x_{i-1}) = C^{++}_{i-1j-1},$$

$$\varphi 1^-{}_i(y_j) = \varphi 2^-{}_j(x_i) = C^{--}_{ij},$$

$$\varphi 1^+{}_{i-1}(y_j) = \varphi 2^-{}_j(x_{i-1}) = C^{+-}_{i-1j},$$

то на границі прямокутника Π_{ij} *функція* $S_{ij}(x,y)$ *задовольняє інтерлінаційним властивостям, тобто*

$$S_{ij}(x,y)\Big|_{x=x_{i-1}} = \varphi 1^{+}_{i-1}(y),\ y_{j-1} \le y \le y_j$$

$$S_{ij}(x,y)\Big|_{x=x_{i}} = \varphi 1^{-}_{i}(y),\ y_{j-1} \le y \le y_j,$$

$$S_{ij}(x,y)\Big|_{y=y_{j-1}} = \varphi 2^{+}_{j-1}(x),\ x_{i-1} \le x \le x_i$$

$$S_{ij}(x,y)\Big|_{y=y_{j}} = \varphi 2^{-}_{j}(x),\quad x_{i-1} \le x \le x_i,$$

Доведення. Підставимо у формулу (1) $x = x_{i-1}$. В результаті отримаємо:

$$S_{ij}(x_{i-1},y) = S1_{ij}(x_{i-1},y) + S2_{ij}(x_{i-1},y) - S12_{ij}(x_{i-1},y),=$$

$$= \varphi 1^{+}_{i-1}(y) + \varphi 2^{+}_{j-1}(x_{i-1})\cdot\frac{y-y_j}{y_{j-1}-y_j} + \varphi 2^{-}_{j}(x_{i-1})\cdot\frac{y-y_{j-1}}{y_j-y_{j-1}} -$$

$$-C^{++}_{i-1,j-1}\frac{y-y_j}{y_{j-1}-y_j} - C^{+-}_{i-1,j}\frac{y-y_{j-1}}{y_j-y_{j-1}} = \left|\begin{matrix}\left(\varphi 2^{+}_{j-1}(x_{i-1})\right) = C^{++}_{i-1\,j-1}\\ \left(\varphi 2^{-}{}_{j}(x_{i-1})\right) = C^{+-}_{i-1\,j}\end{matrix}\right| =$$

$$= \varphi 1^{+}_{i-1}(y) + C^{++}_{i-1\,j-1}\cdot\frac{y-y_j}{y_{j-1}-y_j} + C^{+-}_{i-1\,j}\cdot\frac{y-y_{j-1}}{y_j-y_{j-1}} -$$

$$-C^{++}_{i-1,j-1}\frac{y-y_j}{y_{j-1}-y_j} - C^{+-}_{i-1,j}\frac{y-y_{j-1}}{y_j-y_{j-1}} = \varphi 1^{+}_{i-1}(y)\,.$$

Таким чином, ми довели, що $S_{i,j}(x_{i-1},y) = \varphi 1^{+}{}_{i-1}(y),\ y_{j-1} \le y \le y_j$.

Аналогічно доводяться рівності, коли у формулу (1) підставляємо $x = x_i$, $y = y_{j-1}$, $y = y_j$. Теорема 1 доведена.

Теорема 2. *Якщо*

$$\varphi 1^{-}_{k}(y) = \varphi 1^{+}_{k}(y) = \varphi 1_{k}(y),\ k = \{i-1,i\}\,,$$

$$\varphi 2^{-}_{\ell}(x) = \varphi 2^{+}_{\ell}(x) = \varphi 2_{\ell}(x)\,,$$

то функція $S(x,y) = S_{ij}(x,y),\ (x,y)\in\Pi_{ij}$ *буде мати такі властивості:*

$$S(x,y)\in C(D)\,.$$

$$S(x,y)\Big|_{x=x_k} = \phi 1_k(y),\quad y_{j-1}\le y\le y_j, \tag{2}$$

$$S(x,y)\Big|_{y=y_\ell} = \phi 2_\ell(x),\quad x_{i-1}\le x\le x_i \tag{3}$$

Доведення витікає з того, що якщо функції $\phi 1_k(y)\in C[x_{i-1},x_i]$, $\phi 2_\ell(x)\in C[y_{j-1},y_j]$, то в кожному елементі Π_{ij} функція $S_{ij}(x,y)$ буде належати класові $C(\Pi_{ij})$. А доведення формул (2), (3) здійснюється по аналогії з доведенням властивостей в в теоремі 1. Теорема 2 доведена.

Зауваження. В принципі припускається, що розриви функції $S(x,y)$ можуть існувати лише на границях одного або декількох елементів.

Теорема 3. *Припустимо, що наближувана функція* $f(x,y)\in C(D\setminus\overline{\Pi_{kl}})$ *і* $\phi 1^{+}_{i-1}(y)\neq \phi 1^{+}_{i}(y)$, $\phi 2^{+}_{j-1}(x)\neq \phi 2^{-}_{j}(x)$. *Тоді, якщо у* $S(x,y)$ *покласти*

$$\varphi 1^{-}_{i'}(y)=\varphi 1^{+}_{i'}(y)=f(x_{i'},y),\ i'\in\{0,1,...,m\},\ i'\neq i-1,\ i'\neq i,\ 0\leq y\leq 1,$$

$$\varphi 2^{-}_{j'}(x)=\varphi 2^{+}_{j'}(x)=f(x,y_{j'}),\ j'\in\{0,1,...,n\},\ j'\neq j-1, j'\neq j,\ 0\leq x\leq 1$$

$$\varphi 1^{-}{}_{i-1}(y)=\varphi 1^{+}{}_{i-1}(y)=f(x_{i-1},y),\ 0\leq y\leq y_{j-1}\ \textit{або}\ y_j\leq y\leq 1,$$

$$\varphi 2^{-}{}_{j-1}(x)=\varphi 2^{+}{}_{j-1}(x)=f(x,y_{j-1}),\ 0\leq x\leq x_{i-1}\ \textit{або}\ x_i\leq x\leq 1,$$

$$\begin{array}{ll}\varphi 1^{+}_{i-1}(y)=f(x_{i-1}+0,y), & \varphi 1^{-}_{i}(y)=f(x_i-0,y)\\ \varphi 1^{-}_{i-1}(y)=f(x_{i-1}-0,y), & \varphi 1^{+}_{i}(y)=f(x_i+0,y)\end{array},$$

$$\begin{array}{ll}\varphi 2^{+}_{j-1}(x)=f(x,y_{j-1}+0), & \varphi 2^{-}_{j}(x)=f(x,y_j-0)\\ \varphi 2^{-}_{j-1}(x)=f(x,y_{j-1}-0), & \varphi 2^{+}_{j}(x)=f(x,y_j+0)\end{array},$$

то отримана функція $S(x,y)$ *буде належати до класу* $C(D)$ *і буде розривною разом лише на границі елемента* Π_{ij}.

Доведення витікає з того, що на границі між всіма елементами (за виключенням елемента Π_{ij}) функція $S(x,y)$ буде неперервною і лише на границі елемента Π_{ij} може бути розривною разом. Тобто така функція буде належати класу $S(x,y)\in C(D\setminus\overline{\Pi_{kl}})$.

Теорема 3 доведена.

Визначимо похибку наближення функції $f(x,y)$ побудованою розривною конструкцією (1).

Теорема 4. *Якщо виконуються умови теореми 1, то для похибки наближення такої розривної функції* $f(x,y)$ *відповідним розривним інтерлінаційним сплайном* $S(x,y)$ *буде виконуватись співвідношення:*

$$\left|f(x,y)-S(x,y)\right|=O(\Delta 1^2\Delta 2^2),\ (x,y)\in\Pi_{kl}\neq\Pi_{i,j},$$

$$\Delta 1=\max_k(x_k-x_{k-1}),\ \Delta 2=\max_l(y_l-y_{l-1})$$

$$\left|f(x,y)-S(x,y)\right|=O(\Delta i^2\Delta j^2),\ (x,y)\in\Pi_{i,j},$$

$$\Delta i=x_i-x_{i-1},\ \Delta j=y_j-y_{j-1},\ (i,j)\neq(k,l)$$

при умові, що $f(x,y)\in C^{(2,2)}(\Pi_{i,j})$.

Доведення. Оператор $S_{ij}(x,y)=S_{ij}f(x,y)$ згідно з означенням може бути записаний у вигляді

$$S_{ij}f(x,y)=S1_{ij}f(x,y)+S2_{ij}f(x,y)-S12_{ij}f(x,y).$$

Згідно з теоремою 3.2.1 роботи [5] залишок наближення формулами інтерлінації виражається як операторний добуток залишків наближення функції $f(x,y)$ операторами $S1_{ij}f(x,y)$ та $S2_{ij}f(x,y)$

$$RS_{ij}f(x,y) = (f(x,y) - S_{ij}f(x,y)) =$$
$$= (f(x,y) - S1_{ij}f(x,y) - S2_{ij}f(x,y) + S12_{ij}f(x,y)) =$$
$$= (f(x,y) - S1_{ij}f(x,y))(f(x,y) - S2_{ij}f(x,y)) = RS1_{ij}f(x,y)RS2_{ij}f(x,y)$$

В цьому випадку оцінка похибки витікає з наслідку 3 до теореми 3.2.2 роботи [3]. Теорема 5 доведена.

Приклад 1. Нехай $m = 2,\ n = 2$, $x_0 = 0,\ x_1 = 0.5, x_2 = 1,\ \ y_0 = 0,$ $y_1 = 0.5,\ \ y_2 = 1$

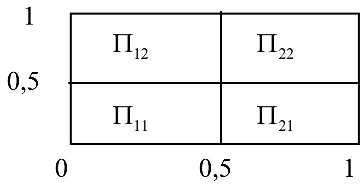

Рис.1. Область визначення наближуваної функції $f(x,y)$

Нехай

$$\Pi_{11} = \{(x,y): x_0 < x < x_1, y_0 < y < y_1\},$$
$$\Pi_{12} = \{(x,y): x_0 < x < x_1, y_1 < y < y_2\},\ \Pi_{21} = \{(x,y): x_1 < x < x_2, y_0 < y < y_1\},$$
$$\Pi_{22} = \{(x,y): x_1 < x < x_2, y_1 < y < y_2\}$$

Задамо функцію $f(x,y)$ в кутових точках елементів Π_{ij} наступним чином:

$\Pi_{11}: f^{+,+}(0;0) = f(0+0;0+0) = 1$

$f^{+,-}(0;0.5) = f(0+0;0.5-0) = 2$

$f^{-,-}(0.5;0.5) = f(0.5-0;0.5-0) = 1$

$f^{-,+}(0.5;0) = f(0.5-0;0+0) = 2$

$\Pi_{12}: f^{+,+}(0;0.5) = f(0+0;0.5+0) = 1$

$f^{+,-}(0;1) = f(0+0;1-0) = 2$

$f^{-,-}(0.5;1) = f(0.5-0;1-0) = 1$

$f^{-,+}(0.5;0.5) = f(0.5-0;0.5+0) = 2$

$\Pi_{21}: f^{+,+}(0.5;0) = f(0.5+0;0+0) = 3$

$f^{+,-}(0.5;0.5) = f(0.5+0;0.5-0) = 4$

$f^{-,-}(1;0.5) = f(1-0;0.5-0) = 3$

$f^{-,+}(1;0) = f(1-0;0+0) = 4$

$\Pi_{22}: f^{+,+}(0.5;0.5) = f(0.5+0;0.5+0) = 3$

$f^{+,-}(0.5;1) = f(0.5+0;1-0) = 4$

$f^{-,-}(1;1) = f(1-0;1-0) = 3$

$f^{-,+}(1;0.5) = f(1-0;0.5+0) = 4$

Розривний сплайн будемо будувати у вигляді:

$$S(x,y)=\begin{cases} 2x+2y-8xy+1, & (x,y)\in\Pi_{11} \\ -10x-6y+8+8xy, & (x,y)\in\Pi_{12} \\ -4xy+2x+2y+2\ , & (x,y)\in\Pi_{21} \\ -8xy+6x+6y-1, & (x,y)\in\Pi_{22} \end{cases}.$$

Як бачимо, функція $S(x,y)$ на границі між елементами Π_{11} і Π_{21} при $x<x_1$ буде мати наступні сліди:

$$S(x,y)=S(x_1-0,y)=S_{11}(x_1,y)=$$
$$=f^{-,+}(0.5;0)\frac{y-y_1}{y_0-y_1}+f^{-,-}(0.5;0.5)\frac{y-y_0}{y_1-y_0},\quad y_0\le y\le y_1.$$

Аналогічно

$$S(x,y)=S(x_1+0,y)=S_{21}(x_1,y)=$$
$$=f^{+,+}(0.5;0)\frac{y-y_1}{y_0-y_1}+f^{+,-}(0.5;0.5)\frac{y-y_0}{y_1-y_0},\quad y_0\le y\le y_1.$$

Тобто, якщо $f^{-,+}(0.5,0)\ne f^{+,+}(0.5,0)$, то в точці $(0.5;0)$ такий сплайн буде розривним. Крім того, якщо в точці $f^{+,+}(0.5;0.5)\ne f^{+,-}(0.5;0.5)$, то сплайн буде розривним на всій лінії $x=0.5,\ \ y_0\le y\le y_1$.

Задамо наближувану функцію у вигляді

$$f(x,y)=S_{ij}(x,y)+\frac{(x-x_{i-1})(x_i-x)(y-y_{j-1})(y_j-y)}{4},\ (x,y)\in\Pi_{i,j},\ i,j=1,2$$

Таким чином, в кожному з чотирьох елементів задання наближувана функція має частинну похідну $f^{2,2}(x,y)\equiv 1$, $\forall(x,y)\in\Pi_{ij}$. Тому, згідно з теорією, похибка наближення такої розривної функції, написаним вище розривним сплайном, буде задовольняти нерівності:

$$\max_{(x,y)\in\Pi_{ij}}\left|f(x,y)-S_{i,j}(x,y)\right|\le f^{(2,2)}(\xi,\eta)\cdot\frac{\Delta i^2\Delta j^2}{2!\cdot 2!}=1\cdot\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2!\cdot 2!}=\frac{1}{64}\approx 0.016\,.$$

Наближувана функцію $f(x,y)$ та наближуючий сплайн $S(x,y)$ зображені на рис. 2

Приклад 2. Нехай в області, визначеній в прикладі 1, задана функція $f(x,y)$ з розривами першого роду у вузлах заданої прямокутної сітки

$$f(x,y)=\begin{cases} x^2+y^2, & (x,y)\in\Pi_{11} \\ x^2-y^2, & (x,y)\in\Pi_{12} \\ -x^2+y^2, & (x,y)\in\Pi_{21} \\ -x^2-y^2, & (x,y)\in\Pi_{22} \end{cases}$$

Ця функція має розриви першого роду на границях заданої прямокутної сітки, а значить і в кутових точках сітки.

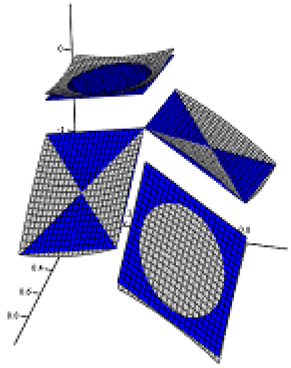

Рис.2. Графічний вигляд наближуваної функції $f(x,y)$ (світлий колір) та наближуючої функції $L(x,y)$, що визначені на прямокутних елементах.

Спочатку побудуємо розривний білінійний апроксимаційний сплайн на заданій прямокутній сітці, для цього скористаємося результатами роботи [7], в якій апроксимаційний сплайн в кожному елементі розбиття будується за формулою

$$L_{ij}(x,y,C)=C^{++}_{i-1,j-1}\frac{x-x_i}{x_{i-1}-x_i}\frac{y-y_j}{y_{j-1}-y_j}+C^{+-}_{i-1,j}\frac{x-x_i}{x_{i-1}-x_i}\frac{y-y_{j-1}}{y_j-y_{j-1}}+$$
$$+C^{-+}_{i,j-1}\frac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}}\frac{y-y_j}{y_{j-1}-y_j}+C^{--}_{i,j}\frac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}}\frac{y-y_{j-1}}{y_j-y_{j-1}},\ (x,y)\in\Pi_{ij};$$

де C – матриця невідомих коефіцієнтів.

В цьому випадку експериментальними даними є значення функції в кутових точках прямокутної сітки, тобто

$$f^{-+}(0.5,0)=0.25,\ f^{++}(0.5,0)=-0.25$$
$$f^{+-}(0,0.5)=0.25,\ f^{++}(0,0.5)=-0.25$$
$$f^{--}(0.5,0.5)=0.5,\ f^{-+}(0.5,0.5)=0,$$
$$f^{++}(0.5,0.5)=-0.5,\ f^{+-}(0.5,0.5)=0$$
$$f^{--}(1,0.5)=-0.75,\ f^{-+}(1,0.5)=-1.25$$
$$f^{--}(0.5,1)=-0.75,\ f^{+-}(0.5,1)=-1.25$$

Далі, застосовуючи метод найменших квадратів, розв'язуємо мінімізаційну задачу

$$F(C) = \iint_D (f(x,y) - L(x,y,C))^2 dxdy \to \min$$

Ця задача була розв'язана в системі комп'ютерної математики MathCad та була отримана наступна матриця коефіцієнтів

$$C = \begin{pmatrix} -0.083 & 0.167 & 0.167 & 0.417 \\ -0.25 & 0 & -1 & -0.75 \\ -0.25 & -1 & 0 & -0.75 \\ -0.417 & -1.167 & -1.167 & -1.917 \end{pmatrix}.$$

Тобто білінійний наближуючий сплайн набуває наступного вигляду (рис.2):

$$L(x,y) = \begin{cases} 0.5x + 0.5y - 0.083, & (x,y) \in \Pi_{11} \\ 0.5x - 1.5y + 0.5, & (x,y) \in \Pi_{12} \\ -1.5x + 0.5y + 0.5, & (x,y) \in \Pi_{21} \\ -1.5x - 1.5y + 1.083, & (x,y) \in \Pi_{22} \end{cases}$$

Далі визначимо максимальне відхилення наближуваної функції $f(x,y)$ від побудованого білінійного сплайну $L(x,y)$:

$$\max \left| f(x,y) - L(x,y) \right| \approx 0.064$$

Тепер на заданій сітці вузлів для заданої розривної функції $f(x,y)$ побудуємо розривний інтерлінаційний сплайн у вигляді формули (1).

В цьому випадку експериментальними даними є сліди заданої функції на лініях прямокутної сітки. Інтерлінаційний сплайн має вигляд

$$S(x,y) = \begin{cases} x^2 + y^2, & (x,y) \in \Pi_{11} \\ x^2 - y^2, & (x,y) \in \Pi_{12} \\ -x^2 + y^2, & (x,y) \in \Pi_{21} \\ -x^2 - y^2, & (x,y) \in \Pi_{22} \end{cases}$$

Як бачимо, він повністю співпадає з наближуваною функцією, тобто

$$\max \left| f(x,y) - S(x,y) \right| = 0 .$$

Таким чином, інтерлінаційний розривний сплайн точно відновлює задану розривну функцію на заданій прямокутній сітці вузлів.

Висновки. В даній статті запропоновано загальний метод побудови розривних сплайн–інтерлінантів, які як частинний випадок включають в себе розривні сплайни та неперервні сплайни. Сформульовано і доведено теореми про інтерлінаційні властивості таких розривних конструкцій та апроксимативні їх властивості. Зокрема, з цих властивостей витікає наступна точка зору авторів: розривні в деяких точках або на деяких лініях функції від двох змінних краще наближувати розривними сплайн–інтерлінантами. При цьому можна отримати однаково високі оцінки похибки наближення в кожному елементі розбиття, притаманні неперервно–диференційовним сплайн–інтерлінантам.

Наступним кроком автори планують розробку теорії розривних сплайн–інтерлінантів на областях складної форми, обмежених дугами відомих кривих.

ЛИТЕРАТУРА

1. Стечкин С.Б., Субботин Ю.Н. Сплайны в вычислительной математике. М.: Наука. – 1976.
2. Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л. Методы сплайн–функций. М.: Наука. – 1976.
3. Василенко В.А. Сплайн–функции: теория, алгоритмы, программы. Новосибирск; Наука. – 1983.
4. Литвин О.М., Литвин О.О. Про один метод розв’язання 3D задачі комп’ютерної томографії // Тезисы докладов Международной конференции АППММ’06. – Харків: ІПМАШ ім. А.М. Підгорного. – 2006. – С.18.
5. Литвин О.М. Інтерлінація функцій та деякі її застосування. – Х.: Основа. – 2002. – 504с.
6. Литвин О.М., Першина Ю.І. Наближення розривної функції за допомогою розривних сплайнів. // Математичне та комп’ютерне моделювання. Серія: Фізико–математичні науки: зб. наук. праць. – Кам’янець –Подільський: Кам’янець-Подільський національний університет ім. Івана Огієнка. – 2010. – Вип.3. – С. 122 – 131.
7. Литвин О.М., Першина Ю.І. Побудова кусково–білінійних сплайнів для наближення функцій з розривами першого роду у вузлах ректангуляції двовимірної області // Таврічний вісник інформатики та математики. – 2011. – №1. – С. 63 – 72.