СОВРЕМЕННАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ ЧАСТОТНЫХ КРИТЕРИЕВ УСТОЙЧИВОСТИ

А.И. Музыченко, З.Е. Филер

Государственная летная академия Украины, г. Кировоград
Кировоградский государственный педагогический университет им. Владимира Винниченко, г. Кировоград

Изучение быстро протекающих процессов вынуждает учитывать запаздывание управления в связи с конечной скоростью передачи сигнала. Управление луноходом (марсоходом) с Земли приводит к необходимости учета запаздывания от 3 с до 20 мин в связи с удаленностью объекта управления. Даже для миниЭВМ при высоких частотах (порядка 2,5 ГГц) необходимо учитывать *запаздывание*, с длительностью, сопоставимой с периодом $4\cdot 10^{-10}$ с. Поэтому актуальным является учет запаздывания в системах управления и разработка соответствующих алгоритмов анализа устойчивости таких систем.

Впервые разработкой критериев (необходимых и достаточных условий) устойчивости линейных систем с постоянными коэффициентами занимались французский математик Ш. Эрмит (1856) и английской механик Э. Раус (1877), а позже – немецкий математик А. Гурвиц (1895). В 1936 году советским ученым А.В. Михайловым и независимо американским физиком Г. Найквистом были разработаны более эффективные *частотные* критерии устойчивости.

При исследовании систем порядка выше 4-го пользоваться критериями Рауса и Гурвица вручную технически сложно из-за необходимости проведения громоздких расчетов; кроме того, даже нахождение характеристического полинома сложных систем связано с трудоемкими выкладками.

Но с развитием вычислительной техники и появлением мощных компьютеров становится актуальной и практически разрешимой задача алгоритмизации и последующей программной реализации критериев устойчивости, созданных в «докомпьютерную эру». Желательна также их модернизация для использования новых возможностей, создаваемых появлением быстродействующих компьютеров.

1. Классические критерии асимптотической устойчивости.

Указанные критерии для линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами Рауса и Гурвица созданы в XIX ст. и рассчитаны на ручные вычисления. Критерий Рауса достаточно структурирован и цикличен, что дает возможность его реализовать на ПЭВМ. Несколько более сложна компьютерная реализация критерия Гурвица, но она также возможна.

Существующие критерии устойчивости делятся на две группы: алгебраические и геометрические (частотные). К алгебраическим принадлежат критерии Гурвица, Рауса и др.; к геометрическим – критерии Михайлова, Найквиста и им подобные. Рассмотрим некоторые из них.

Система дифференциальных уравнений $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$ имеет характеристическое уравнение

$$f(\lambda) = |A - \lambda E| = \det(A - \lambda E) = 0 \qquad (1)$$

или в виде $a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0 = 0$.

Напомним, что решение соответствующего дифференциального уравнения $a_n y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = 0$ имеет для корней уравнения (1) $\lambda_k = \alpha_k \pm i\beta_k$ структуру

$$y(t) = \sum_k e^{a_k t}\left(P_k(t)\cos(\beta_k t) + Q_k(t)\sin(\beta_k t)\right).$$

Здесь P, Q – многочлены степени $r_k - 1$ в случае корней λ_k кратности r_k. Если все $\alpha_k < 0$, то $e^{\alpha_k t} \to 0$ при $t \to +\infty$ и решения асимптотически устойчивы [5, 7].

Если удается решить это уравнение, то критерием *асимптотической* устойчивости является отрицательность действительных частей всех корней λ_k. Но их нахождение, даже приближенное, является сложной проблемой для ручных вычислений; кроме того погрешности вычислений могут привести к неверным выводам для малых $|\mathrm{Re}\,\lambda|$. Поэтому желательно получить условия расположения *всех* λ_k в левой полуплоскости *без* их нахождения. В частности, для квадратного уравнения *критерием* асимптотической устойчивости является одинаковость знаков всех коэффициентов. При $a_n > 0$ положительность всех других коэффициентов является ее *необходимым* условием.

Критерий Рауса позволяет определять устойчивость систем путем построения таблицы Рауса и определения знака соответствующих коэффициентов [1]. Этот критерий реализован в виде алгоритма и компьютерной программы. Результатом работы программы является вывод об устойчивости системы. В программе существует два варианта введения данных: путем введения матрицы системы или задания характеристического уравнения (1). Выдается сообщение об асимптотической устойчивости или неустойчивости соответствующей системы.

Критерий Михайлова. В отличие от условий Рауса–Гурвица, критерий Михайлова применим также и к системам с постоянными запаздываниями.

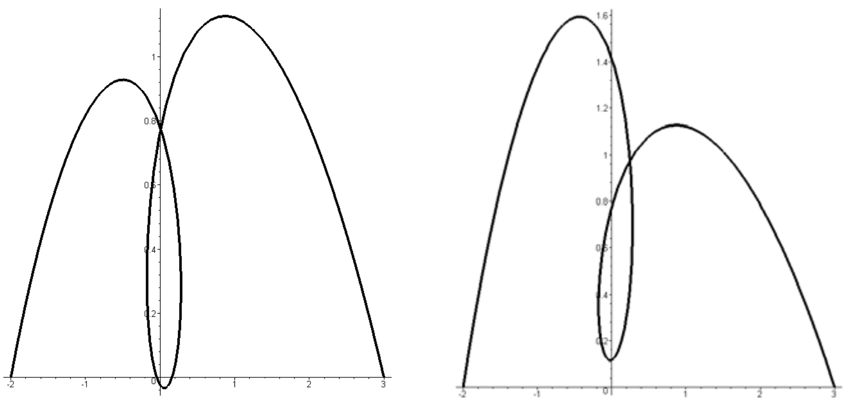
Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = 0$$

Его характеристическим уравнением является (1). Критерий Михайлова формулируется для годографа функции $f(i\omega)$: если при изменении ω от 0 до $+\infty$ радиус-вектор совершает поворот на угол $\Phi = n\pi/2$ против часовой стрелки, то система асимптотически устойчива. Есть и алгебраическая формулировка этого критерия: корни действительной $u(\omega) = \operatorname{Re} f(i\omega)$ и мнимой $v(\omega) = \operatorname{Im} f(i\omega)$ частей функции $f(i\omega)$ при изменении ω от 0 до $+\infty$ чередуются, то есть между двумя последовательными нулями одной функции находится точно один ноль другой. Очевидно, $u(\omega) = a_0 - a_2\omega^2 + \ldots$, $v(\omega) = a_1\omega - a_3\omega^3 + \ldots$.

Финитизация критерия Михайлова. Недостатком критерия является необходимость рассматривания бесконечного интервала изменения ω. Авторами предложено его финитизацию за счет замены $\omega = t/(1-t), t \in [0;1)$ и умножения многочлена на $(1-t)^n$. При этом годограф будет иметь форму конечной спирали, радиус-вектор точек, которая в случае асимптотической устойчивости делает вокруг точки О поворот на угол $\Phi = n\pi/2$. Для описанного алгоритма составлен комплекс компьютерных программ, позволяющий исследовать линейные системы дифференциальных уравнений на асимптотическую устойчивость, строить конечные годографы.

На рис. 1 изображены два случая: а) – устойчивая асимптотически, б) – неустойчивая системы. Соответствующие уравнения отличаются лишь одним коэффициентом a_5.



$$2y^{(6)} + 15y^{(5)} + 27y^{(4)} + 35y''' + 26y'' + 18y' + 3y = 0$$

а)

$$2y^{(6)} + 25y^{(5)} + 27y^{(4)} + 35y''' + 26y'' + 18y' + 3y = 0$$

б)

Рис. 1. Зависимость характера устойчивости от коэффициентов

2. Критерий Михайлова для систем с запаздыванием. Рассмотрим дифференциальное уравнение с постоянными запаздываниями $\tau_{n-k,j}$:

$$y^{(n)}(t)+\sum_{k=1}^{n}\left[a_{n-k}y^{(n-k)}(t)+\sum_{j=1}^{n}\left(b_{n-k,j}y^{(n-k)}\left(t-\tau_{n-k,j}\right)\right)\right]=0\,.$$

Поиск его решения в виде $y(t)=e^{\lambda t}$ приводит к характеристическому уравнению

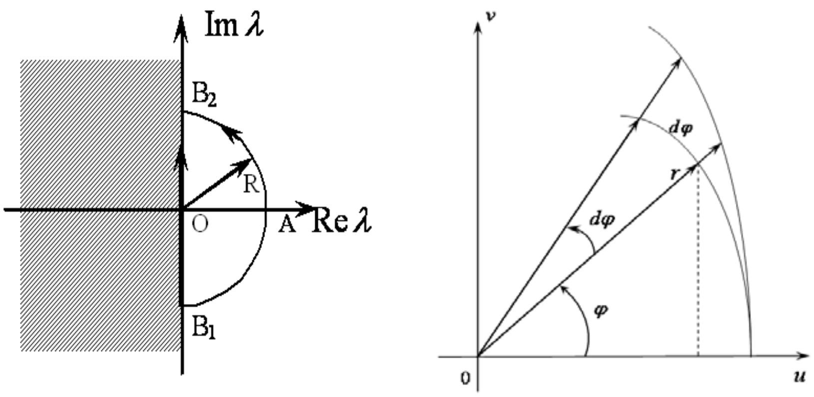
$$f(\lambda)\equiv\lambda^{n}+\sum_{k}\lambda^{n-k}\left(a_{n-k}+\sum_{j}b_{n-k,j}e^{-\lambda\tau_{n-k,j}}\right)=0\,. \qquad (2)$$

Из уравнения (2) получаем

$$f(\lambda)\equiv\lambda^{n}\left(1+\sum_{k}\frac{1}{\lambda^{k}}\left(a_{n-k}+\sum_{j}b_{n-k,j}e^{-\lambda\tau_{n-k,j}}\right)\right)=0\,.$$

При $\lambda=\mathrm{Re}^{i\phi}$ второе слагаемое в скобке стремится к нулю при $R\to\infty$, а первый сомножитель дает аргумент, равный $n\pi$; при рассмотрении верхней полуокружности аргумент $\arg f(\lambda)\to n\pi/2$.

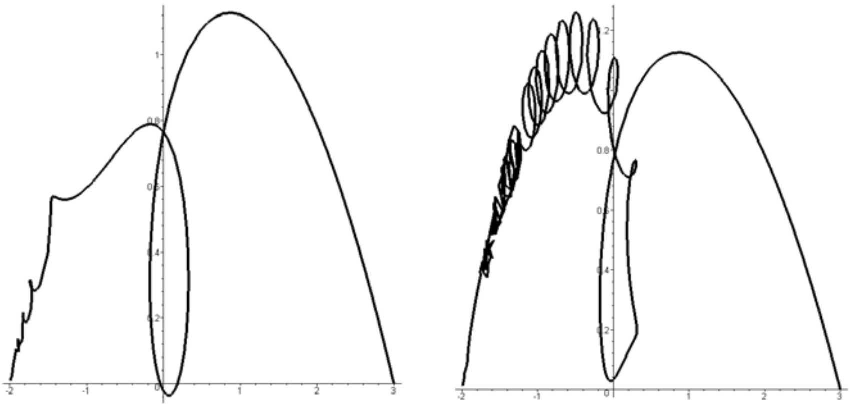
Для трансцендентного уравнения (2) алгебраические критерии не удается модернизировать. Между тем, разработанный для систем без запаздываний, критерий Михайлова дает вывод об устойчивости решений соответствующего дифференциального уравнения с запаздываниями. Покажем справедливость критерия Михайлова и для квазимногочлена (2). По принципу аргумента, если количество корней функции $f(z)$ в полукруге равно нулю, то приращение аргумента вдоль диаметра равно приращению аргумента на полуокружности, которое при $R\to\infty$ равняется $n\pi$: $\Delta_{B_1B_2}\arg f(z)=\Delta_{B_1AB_2}\arg f(z)$ (рис. 2а) [2].



а) б)

Рис. 2. Пояснения в тексте.

Учитывая, что по формуле Эйлера, при $\lambda = i\omega = it/(1-t)$ под знаками синуса и косинуса будем иметь аргумент, который неограниченно растет при $t \to 1$, но сами эти тригонометрические функции ограничены при $R \to \infty$, в конечном счете, не влияют на приращение аргумента. Но годограф при наличии существенных запаздываний перестает быть гладким, как на рис. 1; появляется «дрожь», петли, как на рис. 3.



$$2y^{(6)} + 15y^{(5)} + 5y^{(5)}(t-0.3) + 27y^{(4)} + 35y''' + 26y'' + 18y' + 3y = 0$$

а)

$$2y^{(6)} + 18y^{(5)} + 2y^{(5)}(t-5.3) + 27y^{(4)} + 35y''' + 26y'' + 18y' + 3y = 0$$

б)

Рис. 3. Зависимость характера устойчивости от коэффициентов и запаздывания

На рис. 3а и 3б показана зависимость устойчивости решений уравнения от величины запаздывания (при $\tau = 0.3$ система устойчивая, а при $\tau = 5.3$ – неустойчивая – точка О не охватывается годографом). Сумма коэффициентов членов 5-го порядка в обоих случаях одинакова.

Можно предложить, установив устойчивость системы с коэффициентами $a_k + \sum b_{k,j}$, отойти от $t = 1$ на такое малое число ε, которое показывает близость числа $m = 2\Phi/\pi$ к n, и устанавливает угол поворота годографа квазимногочлена $f_1(z)$ на отрезке $[0;1-\varepsilon]$, близость числа m к n и в этом случае.

Если нет необходимости визуализации описанного поворота, можно найти угол Φ как конечное значение ϕ решения задачи Коши для уравнения

$$\phi' = (v'\cos\phi - u'\sin\phi)/\sqrt{u^2 + v^2}, \; \phi(0) = 0. \tag{3}$$

На рис. 2б. изображены угол поворота годографа $d\phi$ равный $d(\mathrm{arctg}(v/u))$. Отсюда и следует уравнение (3) первого порядка относительно $\phi(t)$.

Если $2\phi(1)/\pi = n$, то уравнение устойчиво асимптотически. Задачу Коши можно решать численно; нет необходимости искать её решение с высокой точностью, учитывая, что $m = 2\phi(1)/\pi$ должно быть *целым* числом. Если погрешность расчетов меньше 0.5, то можно сделать правильный вывод об устойчивости системы даже при приближённом значении m, что реализовано в программе.

3. Системы с периодическими матрицами. В работе авторов [1] рассмотрены линейные системы с периодической матрицей и *постоянными* запаздываниями, а также квазилинейные системы.

Рассматривая системы $d\mathbf{x}/dt = A(t)\mathbf{x}$ с $T-$ периодической матрицей $A(t)$ устойчивость удается установить с помощью специальной *матрицы монодромии* B. Для асимптотической устойчивости этой системы необходимо и достаточно, чтобы все собственные значения ρ матрицы *монодромии* B лежали внутри единичной окружности $|\rho| < 1$ [2].

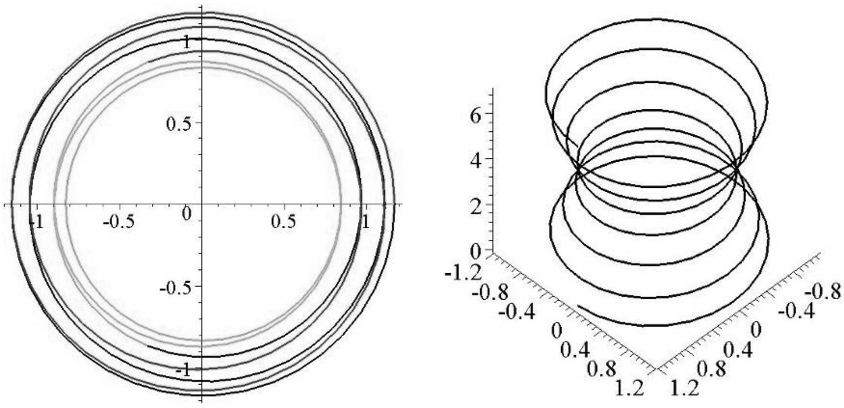


Рис. 4. Годограф системы с периодической матрицей

Для исследования устойчивости матрицу монодромии ищем с помощью численных методов по определению, используя численное интегрирование задачи Коши на отрезке $[0;T]$. Возможно использование методов Эйлера или более точного – Рунге–Кутты [6, 8].

Можно предложить другой метод установления устойчивости с помощью непосредственного применения принципа аргумента для функции $f(\rho)=\det(B-\rho E)$. Если при обходе по окружности единичного радиуса $\rho = e^{i\alpha}$ при изменении α от 0 до 2π, аргумент $\arg f(\rho)$ изменится на $2\pi n$, то система с матрицей монодромии *B* устойчива асимптотически (так как все корни уравнения $\det(B-\rho E)=0$ лежат в единичном круге).

Геометрически кривая $F(\alpha)=f\left(e^{i\alpha}\right)$ при этом сделает *n* оборотов. Эту кривую можно также рассматривать как *годограф* системы $d\mathbf{x}/dt = A(t)\mathbf{x}$. Для матрицы $A(t)$ 7-го порядка показан соответствующий годограф $F(\alpha)$ на рис. 4. Построение этого годографа не обязательно, мы его приводим для наглядности. На рис. 4а изображен плоский годограф; на рис. 4б — его пространственный вариант; координата *z* пропорциональна α.

4. Системы с периодическими запаздываниями. Используя разложение Тейлора по степеням τ: $y(t-\tau)=y(t)-\tau y'(t)+\tau^2/2y''(t)-\ldots$, заменим члены с запаздыванием $\tau=\tau_0+a\cos(\omega t+\theta)$ и, сведя подобные, получим систему с периодическими коэффициентами (см. п. 4) без запаздывания. Такие системы, например, появляются при изучении движения объектов на периодически меняющихся расстояниях от Центра управления. Величина амплитуды $a<\tau_0$. В разложении по степеням τ будем сохранять члены порядка не выше n. При этом погрешность может быть оценена первым отбрасываемым членом. Если она не превышает «допусков» коэффициентов исследуемого уравнения, то можно получить надежный вывод об устойчивости, оценив ее *запас*.

Определение запаса устойчивости систем. Если данная система устойчива асимптотически, то запас ее устойчивости может быть определен с помощью выяснения вопроса: в круге какого максимального радиуса $r_0<1$ система с характеристическим уравнением $f(\lambda r)=0$ еще “устойчива” (а при $r<r_0$ – неустойчива, т. е. не все корни лежат в круге радиуса r).

Мера неустойчивости системы. Для неустойчивой системы можно ввести понятие *меры неустойчивости*, как разницы наименьшего радиуса R_0 круга, который содержит все корни, и единицы, т.е. R_0-1. Величины r_0 и R_0 определяются методом дихотомии.

Алгоритмы определения запаса устойчивости и меры неустойчивости дают возможность решать задачу синтеза различных электромеханических устройств.

5. Критерий Найквиста. В 1932 году Найквист предложил принципиально новый критерий устойчивости. В отличие от критерия Гурвица, который устанавливает принадлежность корней к левой полуплоскости для любого полинома, критерий Найквиста предназначен для исследования устойчивости только замкнутых систем.

Критерий Найквиста — это графоаналитический частотный критерий устойчивости замкнутой линейной системы автоматического регулирования (с обратной связью), который формулируется в терминах свойств разомкнутой системы (с разомкнутым звеном обратной связи).

Пусть рассматривается некоторая линейная система автоматического регулирования с обратной связью и пусть $W(p)=\dfrac{M(p)}{N(p)}$ — передаточная функция соответствующей разомкнутой системы, степень многочлена $M(z)$ m и многочлена $N(z)$ – n такие, что $m<n$. Комплекснозначная функция $z=W(i\omega)$ действительной переменной $\omega\in[0,\infty)$ (амплитудно–фазовая характеристика (АФЧ) разомкнутой системы) описывает в комплексной плоскости z кривую, которая называется *диаграммой Найквиста* (рис. 5). Пусть характеристический многочлен $N(z)$ разомкнутой системы имеет k, $0\le k\le n$, корней с положительными и $n-k$ корней с отрицательными действительными частями.

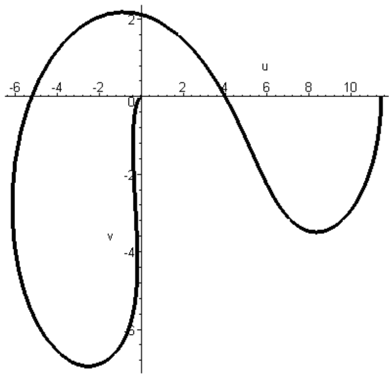
Критерий Найквиста: замкнутая система автоматического регулирования асимптотически устойчива тогда и только тогда, когда диаграмма Найквиста охватывает точку $z=-1$ против хода часовой стрелки $k/2$ раз, или когда вектор с началом -1 и концом $W(i\omega)$ при возрастании ω от 0 до $+\infty$ повернется в положительном направлении на угол πk [3].

Диаграмма Найквиста для замкнутой системы конечна, потому что $\lim\limits_{\omega\to+\infty}\dfrac{M(i\omega)}{N(i\omega)}=0$, но бесконечным является диапазон изменения ω. Для достижения точки, близкой к т. О нужно значительно больше времени, чем при замене $\omega=t/(1-t)$. Так диаграмма Найквиста (рис. 5а) построена при изменении ω от 0 до 1000 за 0,875 с, а при переходе к аргументу t – за 0,016 с. На ней видно, что система асимптотическая устойчива, поскольку она охватывает точку $(-1;0)$.

Строя диаграммы без финитизации и с ней, получим одну и ту же кривую, но на построение финитизированной диаграммы в этом примере тратится меньше времени в 54 раза.

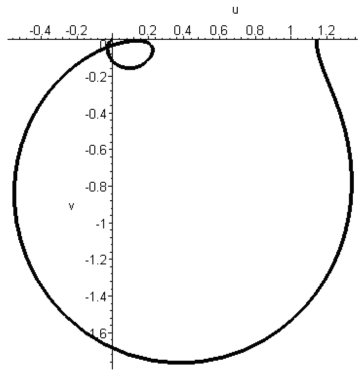
На рис. 5б — диаграмма Найквиста не охватывает точку $(-1;0)$, а поэтому система с передаточной функцией неустойчива.

Для разомкнутой системы получаем годограф Михайлова для функции $\mathrm{N}(\mathrm{i}\omega)$. Он является бесконечной спиралью потому, что предел многочлена при $\omega \to \infty$ не существует (точка $\mathrm{N}(\mathrm{i}\omega)$ отдаляется от т. О), а аргумент комплекснозначной функции растет, в случае асимптотической устойчивости, на величину $\pi \mathrm{k}/2$. В рассмотренном примерах на рис. 5, $\mathrm{k}=4$.



$$W=\frac{800\left(p^2+0.2p+4\right)}{(p+40)\left(p^3+0.8p^2+4p+7\right)}$$

а)



$$W=\frac{800\left(p^2+0.2p+4\right)}{(p+40)\left(p^3+80p^2+40p+70\right)}$$

б)

Рис. 5. Диаграммы Найквиста

Выводы. 1. Рассмотрены существующие критерии устойчивости линейных систем (по Ляпунову).

2. Предложена финитизация критерия Михайлова заменами аргумента $\omega = t/(1-t), t \in [0;1)$ и функции, которая делает годограф конечным. Показано, что критерий Михайлова применим и для уравнений с запаздываниями.

3. Рассмотрены системы с периодическими матрицами. Предложен метод установления устойчивости систем с периодическими запаздываниями.

4. Введены понятия запаса устойчивости и меры неустойчивости.

5. Приведен пример использования финитизации к критерию Найквиста для замкнутых систем управления.

6. Разработаны соответствующие компьютерные программы, реализующие разработанные алгоритмы. Программы тестированы примерами, в т. ч. из [4, с. 39 – 41, с. 51 – 54].

ЛИТЕРАТУРА

1. Филер З.Е., Музыченко А.И. Устойчивость линейных механических систем с последействием. // Прикладная механика, Т. 46, 2010, № 1. – С. 125–137.
2. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. – М.: Наука, 1967. – 472 с.
3. Теория автоматического управления. /под ред. А. В. Нетушила. Изд. 2. – М.: Высшая школа, 1976. – 400 с.
4. Филипов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. Изд. 2. – М.: Физматгиз, 1965. – 100 с.
5. Федорюк М.В. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Наука, 1980. – 352 с.
6. Арнольд В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Наука, 1971. — 240 с.
7. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М.: Наука, 1965. – 704 с.
8. Матвеев Н.М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. Изд. 3, испр. и доп. – М.: Высш. шк., 1967. – 564 с.