ПРИМЕНЕНИЕ ОБОБЩЕННОГО МЕТОДА ФУРЬЕ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ТЕОРИИ ПОТЕНЦИАЛА И ТЕОРИИ УПРУГОСТИ В ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ С ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПОЛОСТЬЮ

Проценко В.С., Украинец Н.А.

Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е.Жуковского «ХАИ», г. Харьков, Украина

Многие современные проблемы гидромеханики, электродинамики, теории фильтрации и теории упругости сводятся к решению краевых задач для уравнений эллиптического типа. Для решения таких задач на практике в настоящее время чаще всего используется метод конечных элементов [1,2]. Как правило, этот метод позволяет построить приближенное решение задачи с высокой точностью. Однако он оказывается малоэффективным для многосвязных областей с близко расположенными границами и не применим к бесконечным областям.

В настоящей работе рассматриваются задачи теории потенциала и теории упругости для полупространства с круговой цилиндрической полостью, расположенной параллельно его границе. Для решения таких задач используется обобщенный метод Фурье [3,4]. Обобщенный метод Фурье на аналитическом уровне учитывает граничные условия на поверхности полупространства. В этом его полное совпадение с классическим методом Фурье. Он позволяет точно учесть локальные свойства исследуемых полей (потенциальных, перемещений и напряжений) и влияние других границ (полостей, включений и т.д.). Обобщенный метод Фурье сохраняет все достоинства классического метода (Улитко А.Ф., Подильчук Н.Н., Гузь А.Н. и др.), но при наличии теорем сложения [5] приводит к бесконечным системам вместо явных выражений для коэффициентов разложения искомых функций в ряды. Свойства оператора задачи позволяет применить к решению систем метод редукции [6]. В предельных случаях метод дает отдельно точные решения по классическому методу Фурье для полупространства без полости и для пространства с цилиндрической полостью.

В работе [7] решена задача Дирихле для уравнения Лапласа в полупространстве с круговой цилиндрической полостью. Доказана теорема о том, что оператор системы является вполне непрерывным в пространстве l_2 при условии непересечения граничных поверхностей. Доказана также теорема о существовании решения данной задачи. В [8] исследовано напряженно-деформированное состояние упругого полупространства с круговой цилиндрической полостью. Обобщенным методом Фурье найдены решения трех основных задач теории упругости [9–11]. Доказано, что соответствующие операторы являются вполне непрерывными в пространстве l_2 при вышеуказанном условии.

1. Задача Неймана для уравнения Лапласа. Рассмотрим пространственную область Ω, ограниченную двумя непересекающимися координатными поверхностями декартовой и цилиндрической систем координат: плоскостью S_1 и поверхностью кругового цилиндра S_2, ось которого направлена параллельно S_1. Эта область занимает полупространство, которое имеет круговую цилиндрическую полость, расположенную параллельно его границе. Для граничных поверхностей S_j $(j=1,2)$ введем соответствующие одинаково ориентированные системы координат с совмещенными центрами. Ось z направим вдоль оси цилиндра, начало координат O выберем на расстоянии h от границы полупространства S_1. Ось y перпендикулярна S_1. Тогда уравнение плоскости S_1, ограничивающей полупространство, запишется в виде: $y=h$, а уравнение поверхности цилиндра S_2 – в виде $\rho=a$.

Введем наборы линейно независимых частных решений уравнения Лапласа

$$\Delta u = 0 \tag{1}$$

в цилиндрической и декартовой системах координат:

$$R_m(\rho,\phi,z;\lambda)=e^{i\lambda z+im\phi}I_m(\lambda\rho), \tag{2}$$

$$S_m(\rho,\phi,z;\lambda)=(\operatorname{sign}\lambda)^m e^{i\lambda z+im\phi}K_m(|\lambda|\rho), \tag{3}$$

$$u^{(\pm)}(x,y,z;\lambda,\mu)=e^{i\lambda z\pm\gamma y+i\mu x}, \tag{4}$$

где $\gamma=\sqrt{\lambda^2+\mu^2}$, а $I_m(x)$, $K_m(x)$ – модифицированные функции Бесселя первого и третьего рода. Здесь функции R_m (S_m), регулярные в области $\{\rho<R\}$ $(\{\rho>R\})$, где $R>0$, – внутренние (внешние) базисные решения уравнения Лапласа для цилиндра; функции $u^{(-)}$ $\left(u^{(+)}\right)$, регулярные в области $\{y>h\}$ $(\{y<h\})$, – базисные решения для полупространства.

Приведем теоремы сложения гармонических функций.

Теорема 1. *При* $y>0$ *справедливо интегральное представление внешних решений уравнения Лапласа для цилиндра через решения для полупространства*

$$S_m(\rho,\phi,z;\lambda)=\frac{(-i\operatorname{sign}\lambda)^m}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\omega_2^{\,m}(\lambda,\mu)\,u^{(-)}(x,y,z;\lambda,\mu)\frac{d\mu}{\gamma}, \tag{5}$$

где $\gamma=\sqrt{\lambda^2+\mu^2}$, $\omega_2(\lambda,\mu)=\dfrac{\mu-\gamma}{|\lambda|}$, $m=0,\pm1,\pm2,\dots$.

Теорема 2. *Для произвольного комплексного* λ *справедливо разложение решений уравнения Лапласа для полупространства по внутренним решениям для цилиндра*

$$u^{(+)}(x,y,z;\lambda,\mu)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\left(i\,\omega_1\left(\lambda,\mu\right)\right)^m R_m(\rho,\varphi,z;\lambda)\,, \tag{6}$$

где $\omega_1(\lambda,\,\mu)=\dfrac{\mu-\gamma}{\lambda}$.

Рассмотрим краевую задачу для уравнения Лапласа $\Delta u=0$ в данной области с граничными условиями:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{S_1}=\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=h}=u_{01}\left(x,z\right), \tag{7}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{S_2}=-\left.\frac{\partial u}{\partial \rho}\right|_{\rho=a}=u_{02}\left(\phi,z\right), \tag{8}$$

где $u_{01}\left(x,z\right)$ и $u_{02}\left(\phi,z\right)$ – заданные непрерывные функции. Будем считать, что их можно представить в виде абсолютно сходящихся интегралов и ряда:

$$u_{01}\left(x,z\right)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\lambda z}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\mu x}\,C^1\left(\lambda,\mu\right)d\mu\,d\lambda\,, \tag{9}$$

$$u_{02}\left(\phi,z\right)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}e^{im\phi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\lambda z}A_m^1\left(\lambda\right)d\lambda\,. \tag{10}$$

Здесь функция $C^1\left(\lambda,\mu\right)$ является ограниченной, а ряд $\sum_{m=-\infty}^{\infty}A_m^1\left(\lambda\right)$ – абсолютно сходящимся при всех $\lambda\in\left(-\infty,\infty\right)$.

Решение поставленной задачи будем искать в виде линейной комбинации внешних решений уравнения Лапласа для цилиндра и решений для полупространства:

$$u=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}B_m\left(\lambda\right)S_m\left(\rho,\phi,z;\lambda\right)d\lambda+\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}H\left(\lambda,\mu\right)\,u^{(+)}(x,y,z;\lambda,\mu)\,d\mu\,d\lambda\,, \tag{11}$$

где функции $S_m(\rho,\phi,z;\lambda)$, $u^{(+)}(x,y,z;\lambda,\mu)$ заданы формулами (3) и (4), а $B_m(\lambda)$, $H(\lambda,\mu)$ – неизвестные интегральные плотности, определяемые из граничных условий.

Запишем функцию u в цилиндрической системе координат, используя формулу (6) теоремы 2. Найдем производную функции u по переменной ρ:

$$\frac{\partial u}{\partial\rho}=\sum_{m=-\infty}^{\infty}e^{im\phi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\lambda z}\left[B_m(\lambda)(\operatorname{sign}\lambda)^m\frac{\partial K_m(|\lambda|\rho)}{\partial\rho}+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial I_m(\lambda\rho)}{\partial\rho}\int_{-\infty}^{\infty}H(\lambda,\mu)\left(i\,\omega_1(\lambda,\mu)\right)^m d\mu\right]d\lambda. \qquad (12)$$

Удовлетворим на цилиндрической поверхности S_2 условию (8):

$$B_m(\lambda)(\operatorname{sign}\lambda)^m\left.\frac{\partial K_m(|\lambda|\rho)}{\partial\rho}\right|_{\rho=a}+$$

$$+\left.\frac{\partial I_m(\lambda\rho)}{\partial\rho}\right|_{\rho=a}\int_{-\infty}^{\infty}H(\lambda,\mu)(i\,\omega_1(\lambda,\mu))^m d\mu=-A_m^1(\lambda), \quad m=0,\pm1,\pm2,\ldots$$

Отсюда выразим $B_m(\lambda)$:

$$B_m(\lambda)=\frac{-1}{(\operatorname{sign}\lambda)^m\left.\frac{\partial K_m(|\lambda|\rho)}{\partial\rho}\right|_{\rho=a}}\left[A_m^1(\lambda)+\right.$$

$$\left.+\left.\frac{\partial I_m(\lambda\rho)}{\partial\rho}\right|_{\rho=a}\int_{-\infty}^{\infty}H(\lambda,\mu)\left(i\,\omega_1(\lambda,\mu)\right)^m d\mu\right]. \qquad (13)$$

Используя формулу (5) теоремы 1, запишем функцию u в декартовой системе координат:

$$u=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty}B_n(\lambda)\frac{(-i)^n}{2\gamma}\omega_2^n(\lambda,\mu)\,u^{(-)}(x,y,z;\lambda,\mu)+\right.$$

$$\left.+H(\lambda,\mu)\,u^{(+)}(x,y,z;\lambda,\mu)\right]d\mu\,d\lambda. \qquad (14)$$

Здесь в первом слагаемом для удобства изменен индекс суммирования. Распишем в (14) функции $u^{(\pm)}(x,y,z;\lambda,\mu)$ по формулам (4) и найдем производную функции u по переменной y:

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\lambda z}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\mu x}\left[-\sum_{n=-\infty}^{\infty}B_n(\lambda)\frac{(-i)^n}{2}\omega_2^n(\lambda,\mu)e^{-\gamma y}+\gamma H(\lambda,\mu)e^{\gamma y}\right]d\mu\,d\lambda. \quad (15)$$

Удовлетворим на поверхности S_1 граничному условию (7), используя представление (9) для функции $u_{01}(x,z)$:

$$-\frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}B_n(\lambda)(-i\,\omega_2(\lambda,\mu))^n e^{-\gamma h}+\gamma\; e^{\gamma h}H(\lambda,\mu)=C^1(\lambda,\mu),$$

откуда выразим $H(\lambda,\mu)$:

$$H(\lambda,\mu)=\frac{e^{-\gamma h}}{\gamma}\left[C^1(\lambda,\mu)+\frac{e^{-\gamma h}}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}B_n(\lambda)\left(-i\omega_2(\lambda,\mu)\right)^n\right]. \qquad (16)$$

Подставив выражение (16) в равенство (13), придем к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений относительно $B_m(\lambda)$:

$$B_m(\lambda)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}G^1_{m\,n}(\lambda)B_n(\lambda)+Q^1_m(\lambda), \quad m=0,\pm 1,\pm 2,\ldots \qquad (17)$$

Здесь коэффициенты $G^1_{m\,n}(\lambda)$ и правые части $Q^1_m(\lambda)$ системы имеют вид:

$$G^1_{mn}(\lambda)=w^1_{mn}(\lambda)\int_{-\infty}^{\infty}F^1_{mn}(\lambda,\mu)d\mu,\; Q^1_m(\lambda)=v^1_{1m}(\lambda)+v^1_{2m}(\lambda)\int_{-\infty}^{\infty}L^1_m(\lambda,\mu)d\mu,$$

а входящие в них функции:

$$F^1_{mn}(\lambda,\mu)=\frac{e^{-2\gamma h}}{\gamma}\omega_1{}^m(\lambda,\mu)\,\omega_2{}^n(\lambda,\mu),\; L^1_m(\lambda,\mu)=\frac{e^{-\gamma h}}{\gamma}C^1(\lambda,\mu)\,\omega_1{}^m(\lambda,\mu),$$

$$w^1_{mn}(\lambda)=\frac{-(i\,\mathrm{sign}\,\lambda)^m(-i)^n}{2}\frac{\left.\partial I_m(\lambda\rho)/\partial\rho\right|_{\rho=a}}{\left|\left.\partial K_m(|\lambda|\rho)/\partial\rho\right|_{\rho=a}\right|},$$

$$v^1_{1m}(\lambda)=\frac{-(\mathrm{sign}\,\lambda)^m}{\left.\partial K_m(|\lambda|\rho)/\partial\rho\right|_{\rho=a}}A^1_m(\lambda),\; v^1_{2m}(\lambda)=-(i\,\mathrm{sign}\,\lambda)^m\frac{\left.\partial I_m(\lambda\rho)/\partial\rho\right|_{\rho=a}}{\left.\partial K_m(|\lambda|\rho)/\partial\rho\right|_{\rho=a}}.$$

С помощью замены $\xi=e^t$, $\mu=\lambda\,\mathrm{sh}\,t=\frac{\lambda}{2}\left(\xi-1/\xi\right)$, $\gamma=|\lambda|\mathrm{ch}\,t=\frac{|\lambda|}{2}\left(\xi+1/\xi\right)$, интеграл в выражении для коэффициентов $G^1_{m\,n}(\lambda)$ системы (17) приводится к интегралу Лапласа, при этом коэффициенты можно записать в виде:

$$G^1_{mn}(\lambda)=-\mathrm{sign}\lambda\,(-i)^m\,i^n\,\frac{\left.\partial I_m(\lambda\rho)/\partial\rho\right|_{\rho=a}}{\left|\left.\partial K_m(|\lambda|\rho)/\partial\rho\right|_{\rho=a}\right|}K_{m+n}(2|\lambda|h).$$

Учитывая то, что $C^1(\lambda,\mu)$ является ограниченной функцией $\left(\left|C^1(\lambda,\mu)\right| \le R_2,\ \text{где}\ R_2 = \mathrm{Const},\ R_2 > 0\right)$, для интеграла из правой части $Q^1_m(\lambda)$ системы (17) так же, как это было сделано для задачи Дирихле в работе [1], получим оценку:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \left|L^1_m(\lambda,\mu)\right| d\mu \le R_2 \int\limits_0^{\infty} e^{-r\xi} e^{-r/\xi} \xi^{m-1} d\xi = 2R_2\, K_m(2r), \tag{18}$$

где $r = |\lambda|h/2$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

Полагая в системе (17)

$$B_m(\lambda) = \left(m^2+1\right) I_m(\lambda a) b_m(\lambda), \qquad m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

перепишем ее в виде

$$b_m(\lambda) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{G}^1_{mn}(\lambda)\, b_n(\lambda) + \tilde{Q}^1_m(\lambda), \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots. \tag{19}$$

Здесь

$$\tilde{G}^1_{mn}(\lambda) = -\operatorname{sign}\lambda\, \frac{i^n(-i)^m(n^2+1)}{(m^2+1)} \frac{I_n(\lambda a)}{I_m(\lambda a)} \frac{\left.\dfrac{\partial I_m(\lambda\rho)}{\partial\rho}\right|_{\rho=a}}{\left.\dfrac{\partial K_m(|\lambda|\rho)}{\partial\rho}\right|_{\rho=a}} K_{m+n}\left(2|\lambda|h\right),$$

$$\tilde{Q}^1_m(\lambda) = \frac{-\left(\operatorname{sign}\lambda\right)^m}{(m^2+1)\, I_m(\lambda a) \left.\dfrac{\partial K_m(|\lambda|\rho)}{\partial\rho}\right|_{\rho=a}} \Bigg[A^1_m(\lambda) + $$

$$+ i^m \left.\frac{\partial I_m(\lambda\rho)}{\partial\rho}\right|_{\rho=a} \int\limits_{-\infty}^{\infty} L^1_m(\lambda,\mu) d\mu \Bigg].$$

Система (19) в операторной форме имеет вид:

$$\left(I + \tilde{G}^1\right) b^1 = q^1, \tag{20}$$

где $\tilde{G}^1$ – ее оператор, b^1 и q^1 – столбцы неизвестных и правой части.

Теорема 3. *Оператор* $\tilde{G}^1$*, определяемый матрицей системы (19) задачи Неймана, является вполне непрерывным в пространстве* l_2 *при выполнении условия* $a < h$.

Для доказательства теоремы показана сходимость ряда $\sum\limits_{m=-\infty}^{\infty} \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} \left|\tilde{G}^1_{mn}(\lambda)\right|^2$ для любого $\lambda \in R$ при выполнении условия $a < h$. С этой целью были использованы теоремы сложения для модифицированных функций Бесселя $I_m(w)$ и $K_m(w)$ [12], свойства монотонности этих функций [13], а также асимптотические формулы для $I_m(w)$ и $K_m(w)$, справедливые при $m \to \infty$ [14].

Также доказана сходимость ряда, составленного из квадратов правых частей $\sum\limits_{m=-\infty}^{\infty} \left|\tilde{Q}_m^1(\lambda)\right|^2$ системы (19), для $\lambda \in (-\infty, \infty)$ при $a < h$.

Из альтернативы Гильберта и однозначной разрешимости исходной краевой задачи в классе функций $C(\bar{\Omega}) \cap C_\infty(\Omega)$ следует однозначная разрешимость бесконечной системы уравнений (19).

Теорема 4. *Если функции* $A_m(\lambda)$ *и* $C(\lambda, \mu)$ *такие, что интегралы и ряд в (9) и (10) сходятся абсолютно, причем функция* $C(\lambda, \mu)$ *ограничена, то формула (11) представляет непрерывную в области* $\bar{\Omega}: \{y \le h,\ \rho \ge a\}$ *гармоническую функцию, удовлетворяющую краевым условиям (7) и (8) и имеющую производные любого порядка по* x, y *и* z *в области* $\Omega: \{y < h,\ \rho > a\}$.

2. Смешанная задача теории потенциала. Для пространственной области Ω, описанной в п. 1, будем искать решение смешанной задачи для уравнения (1), удовлетворяющее условиям:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{S_1} = \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=h} = u_{01}(x, z), \tag{21}$$

$$u\big|_{S_2} = u\big|_{\rho=a} = u_{02}(\phi, z), \tag{22}$$

причем заданные непрерывные функции, как и в (9), (10), представимы в виде:

$$u_{01}(x, z) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda z} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\mu x} C^2(\lambda, \mu) d\mu \, d\lambda, \tag{23}$$

$$u_{02}(\phi, z) = \sum\limits_{m=-\infty}^{\infty} e^{im\phi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda z} A_m^2(\lambda) \, d\lambda, \tag{24}$$

где функция $C^2(\lambda, \mu)$ является ограниченной, а интегралы и ряд абсолютно сходятся при всех $\lambda \in (-\infty, \infty)$.

Решение задачи (1), (21), (22) в заданной области Ω будем искать в виде (11). Используя теорему 2 и записывая функцию u в цилиндрической системе координат, удовлетворим граничному условию (22) на поверхности S_2, откуда, как и в (13), найдем функцию $B_m(\lambda)$:

$$B_m(\lambda)=\frac{1}{(\operatorname{sign}\lambda)^m K_m(|\lambda|a)}\left[A_m^2(\lambda)-I_m(\lambda a)\int_{-\infty}^{\infty} H(\lambda,\mu)\left(i\,\omega_1(\lambda,\mu)\right)^m d\mu\right],$$

$$m=0,\pm 1,\pm 2,\ldots \qquad (25)$$

Записывая функцию u в декартовой системе координат с помощью теоремы сложения 1, а также формул (4), и дифференцируя полученную функцию по переменной y, удовлетворим краевому условию (21) на поверхности S_1. В результате, выразив функцию $H(\lambda,\mu)$:

$$H(\lambda,\mu)=\frac{e^{-\gamma h}}{\gamma}\left(C^2(\lambda,\mu)+\frac{e^{-\gamma h}}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n(\lambda)\left(-i\omega_2(\lambda,\mu)\right)^n\right)$$

и подставив ее в (25), придем к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений относительно $B_m(\lambda)$:

$$B_m(\lambda)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} G_{mn}^2(\lambda)B_n(\lambda)+Q_m^2(\lambda),\quad m=0,\pm 1,\pm 2,\ldots . \qquad (26)$$

Здесь функции $G_{mn}^2(\lambda)$ записываются в виде:

$$G_{mn}^2(\lambda)=w_{mn}^2(\lambda)\int_{-\infty}^{\infty}F_{mn}^2(\lambda,\mu)\,d\mu,\quad Q_m^2(\lambda)=v_{1m}^2(\lambda)+v_{2m}^2(\lambda)\int_{-\infty}^{\infty} L_m^2(\lambda,\mu)\,d\mu,$$

$$w_{mn}^2(\lambda)=\frac{-(i\operatorname{sign}\lambda)^m(-i)^n}{2}\frac{I_m(\lambda a)}{K_m(|\lambda|a)},$$

$$v_{1m}^2(\lambda)=(\operatorname{sign}\lambda)^m\frac{A_m^2(\lambda)}{K_m(|\lambda|a)},\qquad v_{2m}^2(\lambda)=-(i\operatorname{sign}\lambda)^m\frac{I_m(\lambda a)}{K_m(|\lambda|a)},$$

$$L_m^2(\lambda,\mu)=\frac{e^{-\gamma h}}{\gamma}C^2(\lambda,\mu)\,\omega_1^m(\lambda,\mu),\qquad F_{mn}^2(\lambda,\mu)=F_{mn}^1(\lambda,\mu).$$

Приведя интеграл в $G_{mn}^2(\lambda)$ к интегралу Лапласа, функции $G_{mn}^2(\lambda)$ запишем в виде:

$$G_{mn}^2(\lambda)=\operatorname{sign}\lambda\,(-1)^{m+1}\,i^{m+n}\frac{I_m(\lambda a)}{K_m(|\lambda|a)}K_{m+n}(2|\lambda|h).$$

Учитывая, что функция $C^2(\lambda,\mu)$ является ограниченной, запишем оценку для интеграла, содержащегося в правой части $Q_m^2(\lambda)$ системы (26):

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|L_m^2(\lambda,\mu)\right|d\mu\le R_3\int_0^{\infty}e^{-r\zeta}\,e^{-r/\zeta}\,\zeta^{m-1}\,d\zeta=2R_3K_m(2r),\quad r=|\lambda|h/2.$$

Заменяя в системе (26) функции $B_m(\lambda)$ по формуле

$$B_m(\lambda)=(m^2+1)\,I_m(\lambda a)\,b_m(\lambda),$$

запишем ее в виде

$$b_m(\lambda) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{G}^2_{mn}(\lambda)\, b_n(\lambda) + \tilde{Q}^2_m(\lambda), \tag{27}$$

где

$$\tilde{G}^2_{mn}(\lambda) = -\operatorname{sign}\lambda\ i^n (-i)^m \frac{(n^2+1) I_n(\lambda a)}{(m^2+1) K_m(|\lambda| a)} K_{m+n}(2|\lambda| h),$$

$$\tilde{Q}^2_m(\lambda) = \frac{(\operatorname{sign}\lambda)^m}{(m^2+1) K_m(|\lambda| a)} \left(\frac{A^2_m(\lambda)}{I_m(\lambda a)} - i^m \int_{-\infty}^{\infty} L^2_m(\lambda,\mu) d\mu \right), \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Представим систему (27) в операторной форме:

$$\left(I + \tilde{G}^2\right) b^2 = q^2, \tag{28}$$

где $\tilde{G}^2$ – ее оператор, b^2 и q^2 – столбцы неизвестных и правой части.

Теорема 5. *Оператор* $\tilde{G}^2$ *системы (28) в смешанной задаче теории потенциала – вполне непрерывный в пространстве* l_2 *при условии* $a < h$.

Доказательство этой теоремы проводится аналогично доказательству соответствующей теоремы в задаче Дирихле [7].

Правая часть системы (28) рассматриваемой задачи имеет такой же вид, как правая часть системы в задаче Дирихле [7]. Поэтому для смешанной задачи теории потенциала ряд, составленный из квадратов модулей правых частей системы (28), сходится при выполнении условия $a < h$ для любого $\lambda \in (-\infty, \infty)$.

Таким образом, согласно альтернативе Гильберта, система (28) разрешима и имеет единственное решение в данном классе функций.

3. Основные задачи теории упругости. В работах [8–11] рассмотрено упругое полупространство, заполненное однородной изотропной средой и имеющее круговую цилиндрическую полость, расположенную параллельно его границе. Найдены решения однородного уравнения Ламе

$$\Delta \vec{u} + \frac{1}{1-2\sigma} \nabla \operatorname{div} \vec{u} = 0$$

в полупространстве $y < h$ $(h > a)$ вне цилиндра $\rho > a$ для разных случаев, когда на граничных поверхностях заданы перемещения ($\vec{u}\big|_{S_1} = \vec{u}_{01}(x,z)$, $\vec{u}\big|_{S2} = \vec{u}_{02}(\phi,z)$) (2-я основная задача теории упругости), на обеих поверхностях заданы напряжения ($F\vec{u}\big|_{S_1} = F\vec{u}_{01}(x,z)$, $F\vec{u}\big|_{S_2} = F\vec{u}_{02}(\phi,z)$) (1-я основная задача теории упругости), на одной из поверхностей заданы перемещения, а на другой – напряжения ($F\vec{u}\big|_{S_1} = F\vec{u}_{01}(x,z)$, $\vec{u}\big|_{S_2} = \vec{u}_{02}(\phi,z)$) (смешанная задача теории упругости), где $\vec{u}$ и $F\vec{u}$ – векторы упругих перемещений и напряжений, σ – коэффициент Пуассона. Вводятся декартова и цилиндрическая системы координат, которые связаны с поверхностью полупространства S_1 и цилиндрической поверхностью S_2.

Для граничных поверхностей S_1 и S_2 рассмотрены системы базисных решений уравнения Ламе для полупространства $\vec{u}_k^{(\pm)}(x,y,z;\lambda,\mu)$, а также внутренние $\vec{R}_{k,m}(\rho,\phi,z;\lambda)$ и внешние $\vec{S}_{k,m}(\rho,\phi,z;\lambda)$ базисные решения для цилиндра, записанные в соответствующих системах координат. С помощью соотношения [15]

$$F\vec{u} = 2G\left(\frac{\sigma}{1-2\sigma}\vec{n}\,\mathrm{div}\vec{u} + (\vec{n}\,\mathrm{grad})\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{n}\times\mathrm{rot}\,\vec{u}\right),$$

где G – модуль сдвига, $\vec{n}$ – вектор внешней нормали к рассматриваемой поверхности, получены формулы для напряжений $F\vec{u}_k^{\pm}(x,y,z;\lambda,\mu)$ и $F\vec{R}_{k,m}(\rho,\phi,z;\lambda)$ ($F\vec{S}_{k,m}(\rho,\phi,z;\lambda)$), действующих соответственно на поверхности S_1 с нормалью $\vec{n}_1^{\pm} = \pm\vec{e}_y$ и на поверхности S_2 с нормалью $\vec{n}_2^{\pm} = \pm\vec{e}_\rho$.

Решения рассматриваемых задач записывается в виде суперпозиции внешних решений уравнения Ламе для цилиндра и внутренних решений для полупространства

$$\vec{u} = \sum_{k=1}^{3}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} B_{km}(\lambda)\vec{S}_{k,m}(\rho,\phi,z;\lambda)\,d\lambda +$$
$$+\sum_{p=1}^{3}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} H_p(\lambda,\mu)\vec{u}_p^{(+)}(x,y,z;\lambda,\mu)\,d\mu\,d\lambda,$$

где $B_{km}(\lambda)$ и $H_k(\lambda,\mu)$ – неизвестные интегральные плотности, которые определяются в результате удовлетворения граничным условиям задач.

Авторами доказаны теоремы сложения или формулы переразложения базисных решений уравнения Ламе для полупространства и цилиндра. Использование этих формул позволяет записать решение рассматриваемой задачи в системе координат, связанной с рассматриваемой граничной поверхностью и удовлетворить на ней соответствующему граничному условию.

Таким образом, задачи сводятся к трем бесконечным системам линейных алгебраических уравнений относительно интегральных плотностей $B_{km}(\lambda)$. Эти системы можно записать в операторной форме в виде матричного уравнения:

$$(I+G)\vec{b} = \vec{q}\,.$$

Здесь G – оператор, определяемый матрицей системы, I – единичный оператор, а $\vec{b}$ и $\vec{q}$ – векторы-столбцы неизвестных и правых частей.

Для каждой из рассматриваемых задач доказано, что соответствующий оператор G является вполне непрерывным в пространстве l_2 при условии непересечения граничных поверхностей: $h > a$, а правые части системы принадлежат пространству l_2. Из альтернативы Гильберта следует, что системы рассматриваемых задач разрешимы и имеют единственное решение в пространстве l_2. Приближенное решение может быть найдено методом редукции.

Численные расчеты для указанных задач показывают быструю сходимость метода редукции.

В работе [8] также проведен подробный анализ НДС упругого полупространства с цилиндрической полостью для разных значений геометрических параметров и заданных на граничных поверхностях функций. Проанализировано влияние параметров на напряжения и деформации в описанной области. В частности, обобщенный метод Фурье позволяет находить решения и в случае близко расположенных граничных поверхностей путем сравнительно небольшого увеличения числа уравнений систем рассматриваемых задач.

Заключение. Найдены решения задачи Неймана для уравнения Лапласа и смешанной задачи теории потенциала для полупространства с круговой цилиндрической полостью, расположенной параллельно его границе. Для решения задач использован обобщенный метод Фурье, основанный на теоремах сложения базисных решений уравнения Лапласа для полупространства и цилиндра. В результате задачи сведены к бесконечным системам линейных алгебраических уравнений. Доказано, что операторы систем являются вполне непрерывными в пространстве l_2 при условии непересечения поверхностей. Сформулированы теоремы о существовании решений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сьярле Ф. Метод конечных элементов для эллиптических задач. М.: Мир, 1980. – 512 с.
2. Зенкевич О., Морган К. Конечные элементы и аппроксимация. – М.: Мир, 1986. – 318 с.
3. Проценко В.С., Николаев А.Г. Решение пространственных задач теории упругости с помощью формул переразложения // Прикладная механика. – 1986. – т. 22, № 7.– С. 83 – 89.
4. Проценко В.С., Соловьев А.И. О некоторых формулах разложения в теории гармонических функций и их применение к решению краевых задач // Мат. методы анализа динамич. систем. – Харьков. – 1984. – Вып. 8. – С.50–57.

5. Ерофеенко В.Т. Теоремы сложения: Справочник. – Минск: Наука и техника, 1989. – 255 с.
6. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. – М. – 1977. – 742с.
7. Проценко В.С., Попова Н.А. Задача Дирихле для уравнения Лапласа в полупространстве с цилиндрической полостью. // Вісник Харківського національного університету. Сер. "Математика, прикладна математика і механіка". – 2002. – Вип.542. – С. 42–51.
8. Попова Н.А. Исследование напряженно-деформированного состояния упругого полупространства с круговой цилиндрической полостью // Харківського національного університету, Сер. " Математика, прикладна математика і механіка ". – 2004. – Вип. 645. – С. 102–107.
9. Проценко В.С., Украинец Н.А. Первая основная задача теории упругости для полупространства с круговой цилиндрической полостью. // Труды X Межд. конф. "Совр. проблемы механики сплошной среды", г. Ростов-на-Дону, 5–9 декабря 2006 г. – 2006. – С. 232–236.
10. Проценко В.С., Попова Н.А. Вторая основная краевая задача теории упругости для полупространства с круговой цилиндрической полостью. // Доповіді НАН України. – 2004. – №12. – С. 52–58.
11. Проценко В.С., Украинец Н.А. Смешанная задача для упругого полупространства с круговой цилиндрической полостью. // Теоретическая и прикладная механика. – Донецк. – 2006. – Вып. 42. – С. 17–22.
12. Лебедев Н.Н. Специальные функции и их приложения. – М.–Л.: Физматгиз. – 1963. – 376 с.
13. Люк Ю. Специальные математические функции и их аппроксимации. – М.: Мир. – 1980. – 608 с.
14. Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф. Специальные функции. – М.: Наука. – 1977. – 326 с.
15. Лурье А. И. Теория упругости. М.: Наука. – 1970. – 940 с.