О ЧИСЛЕ ЦЕЛЫХ ТОЧЕК НА КРУГОВОМ КОНУСЕ.

Радова А. С.

ОНУ им. И. И. Мечникова, г. Одесса, Украина

Рассмотрим множество пифагоровых троек:

$$P = \left\{(a,b,c) \in Z^3 \middle| a^2 + b^2 = c^2\right\}.$$

Это множество совпадает с множеством точек с целыми координатами на круговом конусе $u^2 + v^2 = w^2$.

Имеются две основные задачи о распределении целых точек на круговом конусе:

1. построить асимптотическую формулу для величины $K(x)$ – число целых точек конуса под условием $u \ge 0$, $v \ge 0$, $0 < w \le x$ (задача о гипотенузе);
2. построить асимптотическую формулу для величины $P(x)$ – число целых точек конуса под условием $u \ge 0$, $v \ge 0$, $\frac{1}{2}uv \le N$ (задача о площади).

Асимптотическое поведение $K(N)$ изучалось в работах Г. Бабаева, В. Мякишева, М. Строниной и др., а асимптотику $P(N)$ исследовали Y. Lambek, L. Moser, R. Wild, W. Shwarz, H. Menzer, W. Muller, W. Nowak и др.

В настоящей работе мы продолжаем исследование первой задачи. Более точно, нас интересует асимптотика разности $K(N+h) - K(N)$, когда h растёт вместе с N. Эту задачу мы будем называть задачей о числе целых точек конуса на круговом слое.

2. Предварительные результаты. Пусть $c(n)$ – число решений уравнения $u^2 + v^2 = n^2$ в целых числах u, v. Ясно, что $c(n) = r(n^2)$. Функция $\frac{1}{4}r(n)$ – мультипликативна, а потому производящий ряд Дирихле для $c(n)$ имеет вид:

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{c(n)}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{r(n^2)}{n^s} = 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\frac{1}{4}r(n^2)}{n^s} =$$

$$= 4\prod_p \left(1 + \frac{\frac{1}{4}r(p^2)}{p^s} + \frac{\frac{1}{4}r(p^4)}{p^{2s}} + \ldots\right).$$

Учитывая, что

$$\frac{1}{4} r(p^{2k}) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad p = 2 \quad \text{или } p \equiv 3 (\mathrm{mod}\, 4), \\ 2k+1, & \text{если } p \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 4) \end{cases}$$

мы получаем стандартными вычислениями

$$F(s) = 4 \frac{\xi^2(s) \cdot L(s, \chi_4)}{\xi(2s)} (1 + \frac{1}{2^s})^{-1} \tag{1}$$

Равенство (1) показывает, что применение формулы Перрона

$$\sum_{n \le x} c(n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-iT}^{c+iT} F(s) \frac{N^s}{s} ds + O(\frac{x^c}{T(c-1)^2}) \ , \ (c \ge 1 \ , T \ge 1),$$

позволяет (в силу известной в настоящее время границы области, свободной от нулей $\xi(s)$) получить асимптотическую формулу

$$K(x) = \frac{4}{\pi} x \log x + B_0 x + O(x^{\frac{1}{2}} \delta(x)), \tag{2}$$

$B_0 = (2L'(1, \chi_4) - \frac{1}{2}\pi + \gamma\pi) \log 2$, $\delta(x) := \exp(-c(\log x)^{\frac{3}{5}} (\log\log x)^{-\frac{1}{5}})$,
$c > 0 -$ const .

Представим производящую функцию $F(s)$ в виде

$$F(s) = \frac{\xi(s)}{\xi(2s)} \cdot 4 \frac{\xi(s) \cdot L(s, \chi_4)}{(1 - \frac{1}{2^s})} .$$

Множитель $\frac{\xi(s)}{\xi(2s)}$ есть производящий ряд для индикатора $\mu^2(n)$ бесквадратности натурального n. Поведение $\mu^2(n)$ в коротком интервале успешно изучалось в последние годы с помощью оценок тригонометрических сумм. Такой подход можно применить и к рассматриваемой задаче.

Нам понадобятся следующие вспомогательные утверждения:

Лемма 1. [1] *Пусть* $R(n)$ *– количество представлений* n *в виде* $n = (u^2 + v^2)w$ *,* $u, v, w \in Z$ *и пусть* $\frac{1}{2} < \alpha < \frac{2}{3}$*. Тогда справедлива асимптотическая формула*

$$\sum_{n \le x} R(n) = \pi x \log x + Ax +$$

$$+ \frac{(2x)^{1/3}}{\sqrt{3\pi}} \sum_{n \le X} \frac{R(n)}{n^{\frac{2}{3}}} \sin(3\pi(2nx)^{1/3}) + O(x^{1-\alpha+\varepsilon} \log^2 x) ,$$

где $X = \frac{x^{3\alpha-1}}{16\pi^3}$ *,* $A = (2\pi\gamma - \pi + 4L'(1, \chi_4)$*,* $\gamma = 0,5772 -$ *постоянная Эйлера,* $\varepsilon > 0$ *– произвольное малое число.*

Лемма 2. [2] *Пусть* M – *большое целое число,* λ – *малое,* H *положительное. Пусть* $f:[1,M]\to R$, $f\in C^3$ *удовлетворяет условию* $\lambda\le f'''(x)\langle\langle\lambda$ *для* $1\le x\le M$, *тогда*

$$S\langle\langle_{\varepsilon} M^{\varepsilon}\left(\frac{M\lambda^{1/6}}{H^{1/9}}+M\lambda^{1/5}+M^{3/4}\right)+\lambda^{-1/3}.$$

Лемма 3. [3] *Пусть* $\alpha,\beta\in R$, $\alpha\beta\ne 0,1,2$, $X>0$, $M\ge 1$, $N\ge 1$, $|\phi_m|\le 1$, $|\psi_n|\le 1$, $\rho:=\log(2+XMN)$, $S_2:=\sum_{m\sim M}\sum_{n\sim N}\phi_m\psi_n e\left(X\frac{m^{\alpha}n^{\beta}}{M^{\alpha}N^{\beta}}\right)$. *Мы имеем для любого* $\varepsilon>0$

$$\begin{aligned}S_2\langle\langle\Big\{&(X^4M^{31}N^{34})^{1/42}+(X^6M^{53}N^{51})^{1/66}+(X^6M^{46}N^{41})^{1/56}+\\&+(X^2M^{38}N^{29})^{1/40}+(X^3M^{43}N^{32})^{1/46}+(XM^9N^6)^{(1+\varepsilon)/10}+\\&+(X^2M^7N^6)^{1/10}+(XM^6N^6)^{1/8}+M^{1/2+\varepsilon}N+MN^{1/2}+X^{-1/2}MN\Big\}\rho^{9/4}\end{aligned}$$

3. Основные результаты.

Представим производящую функцию $F(s)$ в виде

$$F(s)=\frac{(1-\frac{1}{2^s})^{-1}}{\xi(2s)}\cdot 4\cdot\xi(s)\cdot L(s,\chi_4)\cdot\xi(s). \tag{3}$$

Ясно, что для $\operatorname{Re}s>1$

$$4\cdot\xi(s)\cdot L(s,\chi_4)\cdot\xi(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{R(n)}{n^s},$$

где $R(n)=\sum_{d|n}r(d)=\sum_{n=(u^2+v^2)w}1$

Воспользуемся результатом, полученным М. И. Строниной [Лемма 1] для суммы $\sum_{n\le x}R(n)$:

$$\sum_{n\le x}R(n)=\pi x\log x+Ax+$$
$$+\frac{(2x)^{1/3}}{\sqrt{3}\pi}\sum_{n\le X}\frac{R(n)}{n^{\frac{2}{3}}}\sin(3\pi(2nx)^{1/3})+O(x^{1-\alpha+\varepsilon}\log^2 x), \tag{4}$$

где $X=\frac{x^{3\alpha-1}}{16\pi^3}$, $A=(2\pi\gamma-\pi+4L'(1,\chi_4)$, $\gamma=0{,}5772$ – постоянная Эйлера, $\varepsilon>0$ – произвольное малое число с постоянной в символе «О», зависящей только от ε. [1]

Лемма. *При* $x\to\infty$ *справедлива асимптотическая формула*

$$\sum_{n\le x} R(n) = \pi x \log x + (2\pi\gamma - \pi + 4L'(1,\chi_4))x + O(x^{\theta_1}), \qquad (5)$$

где $\theta_1 = 0,4721699$.

Доказательство. В силу формулы (4) нам необходимо оценить сумму

$$S = \sum_{n\le x} \frac{R(n)}{n^{2/3}} e^{2\pi i(\frac{3\sqrt[3]{2\pi nx}}{2\pi})} = \sum_{mn\le X} \frac{r(n)}{(mn)^{2/3}} e^{2\pi i(mnX_1)^{1/3}}, \qquad (6)$$

где $X_1 = \dfrac{27}{4\pi^2} X$.

Промежуток суммирования $mn \le X$ представим в виде объединения непересекающихся прямоугольников $M < m \le M' \le 2M$, $N < n \le N' \le 2N$. Число таких промежутков есть $O(\log^2 x)$.

Для промежутков под условием

$$M \le Y \le x^{-\frac{2}{7}} X^{\frac{5}{7}},\ N \le Y$$

применим теорему об оценке тригонометрической суммы по третьей производной [Лемма 2]. Мы имеем:

$$f(m) = c_0 (nx)^{1/3} m^{1/3},\ \lambda = (nx)^{1/3} m^{-8/3},\ M = \frac{X}{n} < (nx)^{-2/9}$$

$$S_M = \sum_{m\le M} e^{2\pi i f(m)} \langle\langle M^{5/9} (nx)^{1/18} + M^{3/4} + M^{11/12} (nx)^{-1/12},$$

$$\sum_{n\le Y} S_M(n) \langle\langle \sum_{n\le Y} X^{5/9} x^{1/18} n^{-1/2} + \sum_{n\le Y} X^{3/4} n^{-3/4} + X^{1/4} \sum_{n\le Y} n^{-1/4} (nx)^{-1/12} (\frac{X}{n})^{2/3} \langle\langle$$

$$\langle\langle X^{5/9} x^{1/18} Y^{1/2} + X^{3/4} Y^{1/4} + X^{11/12} x^{-1/12} \ln Y,$$

если $Y \langle\langle x^{-2/7} X^{5/7}$.

$$\sum_{n\le X} S_M(n) \langle\langle \sum\nolimits_1 + \sum\nolimits_2, \qquad (7)$$

$$\sum\nolimits_1 = \sum_{n\le Y} S_M(n) \langle\langle x^{1/18} X^{5/9} Y^{1/2}, \qquad (8)$$

$$\sum\nolimits_2 = \sum_{m\le X/Y} \sum_{Y<n\le\frac{x}{m}} r(n) e^{2\pi i c_0 x^{\frac{1}{3}} (mn)^{\frac{1}{3}}}.$$

Воспользуемся Леммой 3, преобразовав выражение под знаком суммы следующим образом:

$$r(n) e^{2\pi i (mnX_1)^{1/3}} = \phi_m \phi_n e^{2\pi i X \frac{m^{\frac{1}{3}} n^{\frac{1}{3}}}{M^{\frac{1}{3}} N^{\frac{1}{3}}}},$$

где $X = X_1^{1/3} M^{1/3} N^{1/3}$, $\phi_m = 1$, $\phi_n = \dfrac{r(n)}{n^{\varepsilon}}$, $\varepsilon > 0$.

Итак,

$$\sum\nolimits_2 \ll \left\{ x^{\frac{2}{63}} X^{\frac{53}{63}} Y^{-\frac{1}{14}} + x^{\frac{1}{33}} X^{\frac{5}{6}} Y^{-\frac{1}{33}} + x^{\frac{1}{28}} X^{\frac{6}{7}} Y^{-\frac{5}{56}} + x^{\frac{1}{60}} X^{\frac{29}{30}} Y^{-\frac{9}{40}} + \right.$$

$$+ x^{\frac{1}{46}} X^{\frac{22}{23}} Y^{-\frac{11}{46}} + (x^{\frac{1}{30}} X^{\frac{14}{15}} Y^{-\frac{3}{10}})^{(1+\varepsilon)} + x^{\frac{1}{15}} X^{\frac{23}{30}} Y^{-\frac{1}{10}} +$$

$$\left. + x^{\frac{1}{24}} X^{\frac{19}{24}} + XY^{-\frac{1}{2}+\varepsilon} + x^{-\frac{1}{6}} X^{\frac{5}{6}} \right\} \log^{\frac{17}{4}} x$$

Тогда для $M, N \geq Y$ получаем:

$$\sum\nolimits_2 \ll \left\{ x^{\frac{53\alpha}{21}-\frac{17}{21}} Y^{-\frac{1}{14}} + x^{\frac{5\alpha}{2}-\frac{53}{66}} Y^{-\frac{1}{33}} + x^{\frac{18\alpha}{7}-\frac{23}{28}} Y^{-\frac{5}{56}} + \right.$$

$$+ x^{\frac{29\alpha}{10}-\frac{19}{20}} Y^{-\frac{9}{40}} + x^{\frac{66\alpha}{23}-\frac{43}{46}} Y^{-\frac{11}{46}} + (x^{\frac{14\alpha}{5}-\frac{9}{10}} Y^{-\frac{3}{10}})^{(1+\varepsilon)} + \tag{9}$$

$$\left. + x^{\frac{23\alpha}{10}-\frac{7}{10}} Y^{-\frac{1}{10}} + x^{\frac{19\alpha}{8}-\frac{3}{4}} + x^{3\alpha-1} Y^{-\frac{1}{2}} + x^{\frac{5\alpha}{2}-1} \right\} \cdot \log^{\frac{17}{4}} x .$$

Положим $\alpha = 0,532$, $Y = x^{\frac{429\alpha-157}{283}} = x^{0,251689}$ и непосредственной проверкой убеждаемся, что

$$\max_{\substack{M,N \\ MN \leq x \\ M > Y}} S(M, N) = O(x^{\theta}) . \tag{10}$$

$$\max_{m \leq Y} S(m, N) = O(x^{\theta}) , \tag{11}$$

где $\theta < \theta_1 = 0,4721699$. Оценки (10) , (11) доказывают лемму.

Теперь мы можем доказать основную теорему.

Теорема. *При* $h < x$ *справедлива асимптотическая формула*:

$$T(x+h) - T(x) = \frac{4}{\pi}((x+h)\log(x+h) - x\log x) +$$

$$B_1 \cdot h + \begin{cases} O(h^{\frac{1-2\theta_1}{2(1-\theta_1)}} x^{\frac{\theta_1}{2(1-\theta_1)}}), & \text{если } h \geq x^{\frac{2-\theta_1}{3-2\theta_1}}; \\ O(x^{\frac{1}{3-2\theta_1}}), & \text{если } h \leq x^{\frac{2-\theta_1}{3-2\theta_1}}. \end{cases} \tag{12}$$

Доказательство. Положим

$$z(n) = \begin{cases} (-1)^k, & \text{если } n = 2^k,\ k = 0,1,2... \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Тогда

$$(1 + \frac{1}{2^s})^{-1} 4\xi^2(s) \cdot L(s, \chi_4) = \sum \frac{f(n)}{n^s} , \quad \mathrm{Re}\, s > 1,$$

где

$$f(n)=\sum_{d|n}R(d)Z(\frac{n}{d})=\sum_{md=n}R(d)Z(m).$$

Кроме того,

$$\sum_{n\le x}f(n)=\sum_{md\le x}R(d)Z(m)=\sum_{m\le x}Z(m)\sum_{d\le\frac{x}{m}}R(d)=$$

$$=\pi x\sum_{k\le\frac{\log x}{\log 2}}\frac{(-1)^k}{2^k}\log\frac{x}{2^k}+Cx\sum_{0\le k\le\frac{\log x}{\log 2}}\frac{(-1)^k}{2^k}+O(x^{\theta_1}\log^k x\sum_{k\le\frac{\log x}{\log 2}}2^{-k})=$$

$$=\frac{2\pi}{3}x\log x+\frac{2}{3}C\cdot x+O(x^{\theta_1}). \qquad (13)$$

Так как

$$c(n)=r(n^2)=\sum_{d^2m=n^2}\mu(d)f(m),$$

поэтому

$$T(x+h)-T(x)=\sum_{d^2m=n^2}\mu(d)f(m).$$

Для $h\ge\frac{x}{2}$ утверждение теоремы следует из соотношения (2). Поэтому будем считать, что $h<\frac{x}{2}$.

Возьмём $1<y<x^{1/2}$ (его значение уточним далее) и разобьём область суммирования $x<md^2\le x+h$ на три части:

$d\le(\frac{x}{y})^{1/2}$, $(\frac{x}{y})^{1/2}<d\le(\frac{x+h}{y})^{1/2}$, $y<n\le y(1+\frac{h}{x})$, $n\le y$.

Тогда получим:

$$T(x+h)-T(x)=\sum\nolimits_1+\sum\nolimits_2+\sum\nolimits_3. \qquad (14)$$

Имеем, в силу $M(x)=\sum_{n\le x}\mu(n)=O(x)$,

$$\sum\nolimits_3=\sum_{n\le y}f(n)\sum_{\sqrt{\frac{x}{n}}<d\le\sqrt{\frac{x+h}{n}}}\mu(d)=O((\sqrt{x+h}-\sqrt{x})\sum_{n\le y}\frac{f(n)}{\sqrt{n}})=$$

$$=O(\frac{h}{\sqrt{x}}\sqrt{y}\log y). \qquad (15)$$

$$\sum\nolimits_2=O(\sum_{y<n\le y(1+\frac{h}{x})}f(n)\cdot\sum_{(\frac{x}{y})^{1/2}<d\le(\frac{x+h}{y})^{1/2}}1)=O(\frac{h\log x}{x^{1/2}y^{1/2}}). \qquad (16)$$

В сумме $\sum_1$ мы используем соотношение (13) и равенства:

$$\sum_{d\le Y}\frac{\mu(d)}{d^2}=\frac{6}{\pi^2}+O(\frac{1}{Y}),$$

$$\sum_{d\le Y}\frac{\mu(d)}{d^2}\log d=\frac{\xi'(2)}{\xi^2(2)}+O(\frac{1}{Y}\log Y)\ .$$

После простых вычислений выводим

$$\begin{aligned}T(x+h)-T(x)&=\frac{4}{\pi}((x+h)\log(x+h)-x\log x)+B_1h+\\&+O(\frac{hy^{1/2}}{x^{1/2}}\log x)+O(y^{\theta_1-\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}})+O(y^{\frac{1}{2}}\frac{h}{x^{1/2}}\log y)+O(y\log y)\end{aligned}\qquad(17)$$

Осуществим выбор y. Если $h\ge x^{\frac{2-\theta_1}{3-2\theta_1}}$, то полагаем $y=(x/h)^{\frac{1}{1-\theta_1}}$. Если $h<x^{\frac{2-\theta_1}{3-2\theta_1}}$, то полагаем $y=x^{\frac{1}{3-2\theta_1}}$. Теперь из (17) следует утверждение теоремы.

Замечание. В условиях справедливости гипотезы Римана остаточные члены в формуле (12) для дзета–функции $\xi(s)$ могут быть улучшены.

ЛИТЕРАТУРА

1. Стронина М. И. Целые точки на круговых конусах. // Известия ВУЗ. Математика. – 1969. – №8 (87). – С. 112–116.
2. Robert O., Sargos P. A third derivative test for mean values of exponential sums with application to lattice point problems // Acta Arith. – 2003. – v.106. – P.27–39.
3. Sargos P., Wu J. Multiple exponential sums with monomials and their applications in number theory // Acta Math. Hungar. – 2000. – v.87,N4. – P.333–354.