КОНЕЧНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ БЕСКОНЕЧНОЙ ЧИСЛОВОЙ ПОЛУОСИ

Филер З.Е.

Кировоградский государственный педагогический университет
им. В. Винниченко, Украина

В конце 60-х годов автор стал систематически искать способы финитизации бесконечных процессов, в частности, построения годографа Михайлова в теории устойчивости. Изучая проблемы дискретного и непрерывного в математике, физике и философии, автор думал о *конечных* аналогах канторовской иерархии «актуальных» *бесконечностей*. При подготовке к докладу на Международном конгрессе по логике, методологии и философии науки в 1987 г. в Москве [1], автор построил такой аналог. В последние годы он использовал такой подход в преподавании, в частности, в теории рядов и несобственных интегралов. Тогда бесконечность становится «достижимой», видимой.

1. Описание процедуры. Откладывая отрезок длиной 1 от точки 0, сделаем следующую «единицу» длиной $q<1$; следующая «1» будет иметь длину q^2 и т.д. Отрезок с «длиной» n будет изображаться частичной суммой геометрической прогрессии $S_n = \left(1-q^n\right)/\left(1-q\right)$, имеющей *конечный предел* S=1/(1–q). Это первая «бесконечная» канторовская актуальная бесконечность ω. При q=9/10 имеем S=10. Для получения изображения точки 2ω отложим отрезок $S\cdot q$ и т.д., до получения точки ω^2. Затем образуются «числа» $\omega^2+1,...,\omega^3,...,\omega^\omega,...$ Бесконечная иерархия этих «чисел» – образов трансфинитных чисел Кантора, также будет изображаться бесконечной иерархией таких точек (рис. 1). Величина S_n может рассматриваться как *образ* натурального числа n; образом *действительного* числа *x* является число

$$\tilde{x} = (1-q^x)/(1-q) \tag{1}$$

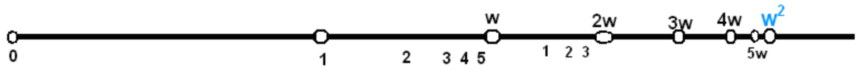


Рис. 1

В связи с возможностью произвольного выбора величины q, такое соответствие не является однозначным. При выборе $q=\left(m-1\right)/m$ длина отрезка – образа числовой оси $L=m$ будет натуральным числом для $m\geq 2$ натурального. Отображение (1) является обратимым и сохраняет линейный порядок на «прямой». Обращая формулу (1), получим $x = \dfrac{\ln\left(1-\tilde{x}\left(1-q\right)\right)}{\ln\left(q\right)}$.

Графически отображение (1) показано на рис. 2 с шагом 0,01. Кривая (1) $y = (1-q^{x})/(1-q)$ имеет горизонтальную асимптоту $y = 1/(1-q)$. При $q = 2/3$ асимптота будет $y = 3$. Симметрично относительно биссектрисы $\tilde{x} = x$ показан график обратной функции с вертикальной асимптотой x = 3.

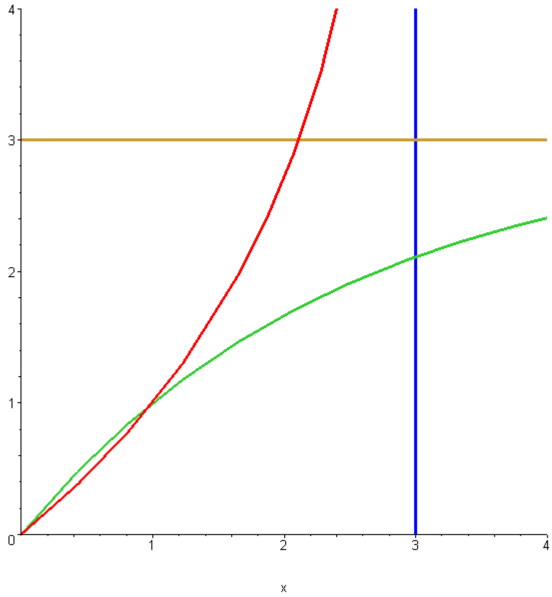


Рис. 2. Финитизация числовой полуоси. Пояснения в тексте.

В [1] сказано, что «любое фактически бесконечное множество может быть потенциально увеличено на еще один элемент, по крайней мере. Именно таким образом строится иерархия бесконечных множеств. Интересно отметить реальную интерпретацию его в виде последовательности точек, сходящихся в геометрической прогрессии, и их пределы. Предельная точка ω будет находиться на *конечном* расстоянии в обычном смысле. С её помощью мы можем построить последовательность точек, $\omega+1$, $\omega+2$, …, $\omega+n$, ... , 2ω и т.д.». Формула (1) и реализует цитируемый алгоритм. К сожалению, в [1] «число» ω не отпечатано.

Ввиду взаимно-однозначного соответствия, задаваемого формулой (1), множество натуральных чисел N *изоморфно* множеству точек $\tilde{N} = \{\tilde{n} = (1-q^{n})/(1-q) \mid n \in N\}$. Сохраняется для него отношение порядка и аксиомы Пеано, а также *аксиома Архимеда*. В частности, $\tilde{n}' = \tilde{n} + \tilde{1}_n$, где $\tilde{1}_n = q^n$. Каждая следующая «единица» в $1/q$ раз короче предыдущей «единицы».

Определение. «Единицей» с номером k будем называть расстояние между образами точек $k-1$ и k. Тогда $\tilde{1}_n = q^n$.

Первая аксиома Пеано гласит, что 1 есть натуральное число; *вторая* утверждает, что следующее за натуральным числом также является натуральным; *третья*: 1 не следует ни за каким натуральным (в отдельных работах предлагают считать первым натуральным числом 0, тогда эта аксиома утверждает, что у 0 нет предыдущего натурального. Образы 0 и 1 совпадают с прообразами); *четвёртая* – единственности – требует, чтобы числа, непосредственно предшествующие одному числу, совпадали. *Пятая* – аксиома индукции. Справедливость всех этих аксиом для множества $\tilde{N}$ следует из его определения. Во множестве $\tilde{N}$ операции сложения + соответствует операция $\tilde{+}$, когда

$$\tilde{x} \tilde{+} \tilde{y} = (1-q^{x+y})/(1-q); \tag{2}$$

операции умножения $\tilde{x} \tilde{\bullet} \tilde{y}$ – операция

$$\tilde{x} \tilde{\bullet} \tilde{y} = (1-q^{x \bullet y})/(1-q).$$

Аналогично можно определить образы операции вычитания, возведения в степень и т.д.: образ частного $\tilde{x} \tilde{/} \tilde{y} = \dfrac{1-q^{x/y}}{1-q}$, образ степени

$\tilde{x}^{\tilde{n}} = \dfrac{1-q^{x^n}}{1-q}$ и т.д.

Легко проверить, что для любых $a > b$ $\exists n \in N$: $a < bn$ и выполняется соответствующее соотношение в $\tilde{N}$, т.е. $\tilde{N}$ – *архимедово* множество. По предложению Грассмана определение последовательных чисел $2 \overset{\text{def}}{=} 1+1$, $3 \overset{\text{def}}{=} 2+1$, …заменится определениями $\tilde{2} = 1+q$, $\tilde{3} = \tilde{2}+q^2$, $\tilde{4} = \tilde{3}+q^3$,...

Очевидно, для любых x, y «сумма» $\tilde{x} \tilde{+} \tilde{y} = (1-q^{x+y})/(1-q) < 1/(1-q)$. Это свойство аналогично свойству сложения скоростей в теории относительности: $v_1 + v_2 < c$, $v + c = c$, где *c* – скорость света.

2. О статье П.К. Рашевского. Со статьёй [2] автор познакомился после Конгресса, увидев в своих поисках возможность реализации надежд известного учёного.

Он отмечает, что «Процесс счёта физических предметов в достаточно простых случаях доводится до конца … теория натурального ряда … распространяет её до «бесконечности». Совокупности большие предполагаются … доступными пересчёту, как и малые… В рамках математической теории подобная идеализация…вполне законна…эта точка зрения навязывается и физике… Духу физики более соответствовала бы…теория целого числа, в которой числа… «большие», приобретали бы… «размытый» вид… Существующая теория … переуточнена: добавление единицы меняет число – а что меняет для физика добавление одной молекулы в сосуд с газом?... для «очень больших» чисел присчитывание единицы… не должно их менять. … числа этой гипотетической теории были бы объектами другой природы, чем числа натурального ряда…почти совпадение имело бы лишь для начальных отрезков существующего и гипотетического натуральных рядов, а по мере удаления по ним различие…должно возрастать…гипотетическая реформа числового ряда должна … сопровождаться …реформой и числовой прямой …Не следует ожидать, что наша гипотетическая теория … будет единственной…она должна будет зависеть от «параметров»… в предельном случае …должна будет совпадать с существующей».

3. Построенные образы $\bar{n}$ натуральных чисел n удовлетворяют гипотезе П.К. Рашевского. Число n имеет образ $\bar{n} = 1 + q + q^2 + ... + q^{n-1}$, а последующее «число» $\overline{(n+1)}$ получается прибавлением n-й «единицы» q^n. С ростом n эта добавка стремится к 0. При $q < 1$, но близком к 1, например, $q = 0.99$, точка ω будет на расстоянии 100 «классических единиц» и сжатие каждой «1» по сравнению с предыдущей «1» будет в 0,99 раза. Поэтому первые числа n будут почти неотличимы от $\bar{n}$. Параметром, от которого зависит упомянутая «теория», является число q. Когда оно стремится к 1, получаем традиционную теорию натуральных чисел N, а для множества положительных действительных чисел $\bar{x}$ – привычное R^+

4. Философский подход к понятию натурального ряда. В большой статье В.А. Успенского [6] значительная часть посвящена натуральному ряду. Он утверждает, что натуральное число следует признать первичным понятием, а аксиомы Пеано определяют не одну, а сразу много математических структур, причем все они изоморфны. Он соглашается со мнением П.К. Рашевского, что «физический» натуральный ряд отличается от «математического». В послесловии публикатора статьи [2] В.В. Корухова в новосибирском журнале «Философия науки» указана статья [9]. Рядом со статьёй Успенского помещена статья [7] о нестандартном анализе.

5. Неархимедова теория числа В.Л.Рвачёва. Выдающийся харьковский математик академик В.Л.Рвачёв предложил новую алгебру, изоморфную классическому исчислению, неархимедову, где аксиома Архимеда, сформулированная для отрезков, заменена аксиомой о существовании наибольшего числа. Он опубликовал работу по приложению в физике дальнего Космоса. Приближение не является следствием рассмотрения времени, а идея о рождении Вселенной в результате большого взрыва миллиарды лет назад, может быть поставлена под сомнение. В основе её лежат работы [9, 8]. Там вводят сложение по формуле

$$x \oplus y = (x + y)/(1 + xy/c^2) \qquad (3)$$

а вычитание $x \Theta y$ – формулой типа (3), где знак «плюс» надо заменить на «минус». Эта операция задаёт на множестве $R_c = [-c; c]$ абелеву группу.

Выводы. В *нашей* модели вводится и операция умножения, относительно которой также имеем абелеву группу. Таким образом, эти операции образуют *поле*. Справедлива

Теорема 1. *Образы элементов поля действительных чисел принадлежат конечному множеству* $\tilde{R}_q = [-1/(1-q; 1/(1-q)]$.

Число $c = 1/(1-q)$ в нашей модели (1) будет при $q = 1 - 1/c < 1$. Свойства те же, что и у множества *R* (замкнутость относительно операций, ∃0, ∃ обратного элемента, нуля $\theta : x \oplus \theta = x$). Строятся все конструкции математического анализа (производная, интеграл и т.д.).

Теорема 2. *Предлагаемая модель* $\tilde{N}$ *изоморфна натуральному ряду* N *в смысле отношений порядка, аксиом Пеано и Архимеда, арифметических операций.*

Нам кажется, что эта модель отвечает пожеланиям П.К. Рашевского. Кроме того, она делает бесконечный «натуральный ряд» размещаемым на конечном отрезке.

Этот подход позволяет «финитизировать» множество «первых» трансфинитных чисел Кантора. Всё же множество трансфинитных чисел бесконечно. Кроме того, формула типа (1) даёт «финитизированную» прямую. Можно построить финитизированную четверть–плоскость [5]

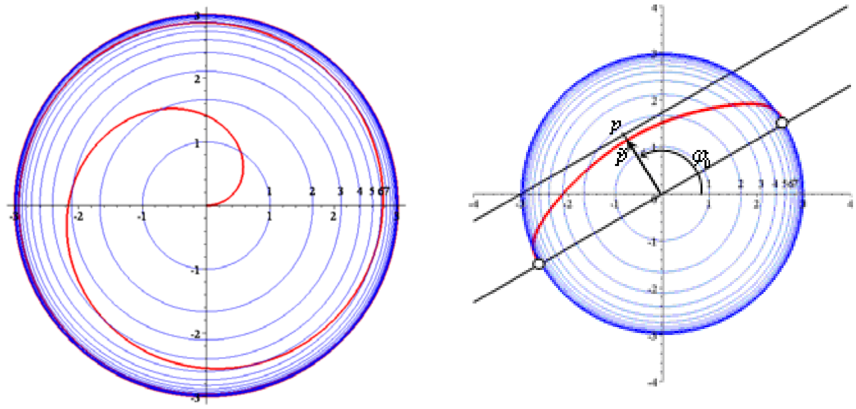
$$\tilde{R}^{2^+} = \left\{ \frac{1-q^x}{1-q}; \frac{1-q^y}{1-q} \mid x, y \in R^+ \right\} \text{или } \tilde{C}^+ = \left\{ \frac{1-q^x}{1-q} + i\frac{1-q^y}{1-q} \mid x, y \in R^+ \right\}$$

– множество «положительных» комплексных чисел (рис.3) и даже трёхмерное пространство $\tilde{R}^3$.

Для отрицательных x можно образ определить формулой

$$\tilde{x} = \text{sign}(x)\frac{1-q^{|x|}}{1-q}.$$

Можно строить точки линии и в полярных координатах $(\rho; \phi)$, используя замену $\rho = \frac{1-q^t}{1-q}, \phi = f(t)$, где $f(t)$ определяется видом кривой. На рис.3а изображена финитная спираль Архимеда, для которой $f(t) = k\ t$.



а б

Рис. 3. Пояснения в тексте.

Рис. 3а изображает спираль Архимеда, а рис. 3б – прямую $\rho = \dfrac{\mathrm{p}}{\cos(\phi - \phi_0)}$ и их финитные образы. Тут $\mathrm{q} = 2/3$. Кривая на рис. 3б является конечным образом бесконечной прямой, отрезок $\tilde{\mathrm{p}}$ – образом отрезка p; концы кривой находятся в концах диаметра, параллельного данной прямой. Образы прямых, параллельных данной прямой, будут кончаться в тех же точках. Образ спирали Архимеда не имеет свойства эквидистантности. Аналогично определяется трёхмерное пространство $\tilde{\mathrm{R}}$ с помощью сферических координат $(\tilde{\rho}, \phi, \theta), \tilde{\rho} = (1 - \mathrm{q}^{\rho}) / (1 - \mathrm{q})$.

А не построить ли финитизированное 4-мерное пространство–время? При сохранении аксиомы Эйнштейна постоянства скорости света с «время» движения по бесконечной полуоси будет конечным, равным $1/\left(\mathrm{c}(1-\mathrm{q})\right)$ Оно определяется выбором коэффициента сжатия пространства q. «Радиус» Мира $1/(1-\mathrm{q})$ и время его существования $1/\left(\mathrm{c}(1-\mathrm{q})\right)$ в этой модели конечны. Величина q может быть в принципе определена экспериментально.

Автор признателен своему ученику А.И.Музыченко за постоянную помощь в построении графиков. Рецензии на статью обратили внимание автора на недочёты и способствовали улучшению её понимания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Filer Z.Y. Historical and Philosophical Problems of the Continuos and Discrete in Mathematics//Abstracts International Congress of Logic, Methodology and Philosophy of Science. – Moscow: Nauka, 1987. – P. 101–103.

2. Арифметика / В кн. Математический энциклопедический словарь. – М.: Сов. энциклоп., 1988. – С. 79.

3. Рашевский П.К. О догмате натурального ряда // УМН. – 1973. – т. 27, N4(172). – С. 246 – 256.

4. Філєр З.Ю. Проблеми нескінченності у математиці, фізиці та філософії// Комбінаторні конфігурації та їх застосування. 5-й Міжвузівський науково–практичний семінар. – Кіровоград: КК–ТК. – 2008. – С.84 – 95.

5. Филер З.Е., Музыченко А.И. Графическое представление бесконечных процессов // Комбінаторні конфігурації та їх застосування. 10-й Міжвузівський науково–практичний семінар. – Кіровоград: КК–ТК. – 2010. – С.146 –152.

6. Успенский В.А. Семь размышлений на темы философии математики // Закономерности развития современной математики. Методологические аспекты. – М.: Наука, 1987. – С.106 – 155.

7. Медведев Ф.А. Нестандартный анализ и история классического анализа // Там же. – С. 75–83.

8. Еременко С.Ю., Кравченко П.Р., Рвачёв В.Л. Комбинируемые неархимедовы исчисления и модели релятивисткой механики // Зарубежная радиоэлектроника. – 1997. – №9. – С.26–38.

9. Рвачёв В.Л. Неархимедова арифметика и другие конструкционные средства математики, основанные на идеях теории относительности // ДАН СССР. – 1991. – т.316, №4. – С. 267 – 270.