РЕШЕНИЕ ОДНОЙ ЗАДАЧИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ СИСТЕМЫ ДВУХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ПО ЗАДАННОЙ ГРУППЕ МОНОДРОМИИ

Хвощинская Л.А.

Белорусский государственный аграрный технический университет,
Минск, Республика Беларусь

Задача определения системы аналитических функций $y_1(z),...,y_m(z)$, которая при обходе вокруг особых точек $a_1,a_2,...,a_n$ испытывает линейное преобразование с помощью постоянных невырожденных матриц $V_1,...,V_n$, была поставлена Б. Риманом в 1857 году. Матрицы $V_1,...,V_n$ образуют так называемую группу монодромии. В течение многих лет проблемой Римана занимались Пуанкаре, Гильберт, Племели, Лаппо–Данилевский, Гахов, Крылов, Кочин, Еругин, Болибрух и др., но до сих пор здесь есть ряд нерешенных вопросов. Подробно история проблемы Римана изложена в монографии [1].

Необходимость дальнейшего развития теории решения проблемы Римана связана с возможностью ее применения к решению прикладных задач в электростатике, гидромеханике, теории упругости, теории конформных отображений и т.д. [2,3]. Явное решение таких задач хорошо строится в случае m=2 и n=3 и выражается через гипергеометрические функции. При $n \geq 4$ возникают трудности с определением некоторых параметров решения.

Рассмотрим задачу определения системы двух функций $y_1(z)$, $y_2(z)$, аналитических в плоскости $\mathbb{C}$ за исключением четырех особых точек a_1,a_2,a_3,∞ по следующей группе монодромии:

$$V_1=\begin{pmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{0}\\ \Delta_1 & \mathbf{1}\end{pmatrix},\qquad V_2=\begin{pmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{0}\\ -\Delta_1 & \mathbf{1}\end{pmatrix},\qquad V_3=\begin{pmatrix}\mathbf{1} & \Delta_2\\ \mathbf{0} & \mathbf{1}\end{pmatrix},\qquad V_4=\begin{pmatrix}\mathbf{1} & -\Delta_2\\ \mathbf{0} & \mathbf{1}\end{pmatrix},$$

$\Delta_1 \neq 0, \Delta_2 \neq 0.$ Матрицы $V_k\left(k=\overline{1,4}\right)$ имеют треугольный вид, совпадающие характеристические числа, но в совокупности не перестановочны, $V_1V_2V_3V_4=E.$

Эту задачу можно сформулировать в виде краевой задачи Римана для вектор-функции $Y(z)=(y_1(z), y_2(z))$ с кусочно–постоянной матрицей на контуре, проходящем через точки a_1,a_2,a_3,∞:

$$Y^+(t)=A_kY^-(t),\ t\in\left(a_k,a_{k+1}\right),\ k=\overline{1,3},\ a_4=\infty, \tag{1}$$

где

$$A_1=V_1^{-1},\ A_2=\left(V_1V_2\right)^{-1}=E,\ A_3=\left(V_1V_2V_3\right)^{-1}=V_3^{-1}.$$

Для определенности решение задачи (1) ищем в классе функций, почти ограниченных при $z \to a_k \left(k = \overline{1,4}\right)$, т.е. в окрестности особых точек допускается логарифмическая особенность.

При решении задачи (1) воспользуемся схемой, изложенной в работах [4,5]. Так как характеристические числа матриц $V_k (k = \overline{1,4})$ группы монодромии совпадают, то имеет место «логарифмический случай», крайне неудобный для исследования. Поэтому решение задачи (1) в окрестности каждой особой точки будем искать в виде

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = D_k \begin{pmatrix} u_k(z) \\ \frac{1}{2\pi i}\ln(z - a_k)\cdot u_k(z) + v_k(z) \end{pmatrix}, \quad k = \overline{1,3},$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = D_4 \begin{pmatrix} z^{-n} u_4(z) \\ \frac{-z^{-n}}{2\pi i}\ln(z)\cdot u_4(z) + v_4(z) \end{pmatrix},$$

где D_k – некоторые матрицы, приводящие матрицы V_k к треугольной жордановой форме, а функции $u_k(z), v_k(z)$ $\left(k = \overline{1,4}\right)$ голоморфны в окрестности точки $a_k, v(a_k) \neq 0,\ n \geq 0.$ Порядок функции $Y(z)$ на бесконечности равен $O_1 = 0.$

Система функций $\left(y_1', y_2'\right)$ удовлетворяет краевому условию (1), но не является почти ограниченной при $z \to a_k \left(k = \overline{1,3}\right).$ Система функций

$$\left(\prod_{k=1}^{3}(z - a_k)\, y_1', \prod_{k=1}^{3}(z - a_k)\, y_2'\right) \qquad (2)$$

также является решением задачи (1), принадлежит выбранному классу, а на бесконечности имеет порядок $p_2 = n - 2.$

Покажем, что в нашем случае каноническую матрицу задачи (1) можно найти в виде

$$X(z) = \begin{pmatrix} y_1 & (z - a_1)(z - a_2)\, y_1' \\ y_2 & (z - a_1)(z - a_2)\, y_2' \end{pmatrix}$$

Для этого достаточно потребовать, чтобы $u_3(z)$ в точке $z = a_3$ имела нуль 1-го порядка. При этом порядок второго столбца на бесконечности равен $p_2 = n - 1,$ т.е. выше порядка функции (2).

Матрица обладает всеми свойствами канонической матрицы:

1) $\det X(z) \neq 0$ для $\forall z \neq a_k$ $\left(k = \overline{1,3}\right),$

2) столбцы матрицы $X(z)$ принадлежат выбранному классу функций,
3) порядок определителя матрицы $X(z)$ равен сумме порядков ее столбцов.

Подставляя матрицы $X(z)$ в краевое условие (1), дифференцируя его на каждом участке и исключая матрицы $A_k\left(k=\overline{1,3}\right)$, приходим к краевому условию

$$\left[X^{-1}\frac{dX}{dt}\right]^{+}=\left[X^{-1}\frac{dX}{dt}\right]^{-1}.$$

Рассмотрим матрицу

$$X^{-1}(z)\frac{dX(z)}{dz}=\begin{pmatrix}\mathbf{0} & \phi_1(z)\\ \dfrac{1}{p(z)} & \phi_2(z)\end{pmatrix}, \qquad (3)$$

где введем обозначения

$$p(z)=(z-a_1)(z-a_2),$$

$$\phi_1(z)=p(z)\frac{y_2'y_1''-y_1'y_2''}{y_1y_2'-y_2y_1'}, \qquad (4)$$

$$\phi_2(z)=\frac{p'(z)}{p(z)}+\frac{y_1y_2''-y_2y_1''}{y_1y_2'-y_2y_1'}.$$

Применим к (3) теорему об аналитическом продолжении и обобщенную теорему Лиувилля. Для этого находим главные части разложения элементов этой матрицы в окрестности особых точек.

Представим функции u_k и v_k $\left(k=\overline{1,4}\right)$ в виде суммы степенных рядов

$$u_k(z)=\sum_{m=0}^{\infty}c_m^{(k)}(z-a_k),\ c_0^{(3)}=0,$$

$$v_k(z)=\sum_{m=0}^{\infty}d_m^{(k)}(z-a_k),\ k=\overline{1,3},$$

$$u_4(z)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{c_m^{(4)}}{z^{m+n}},$$

$$v_4(z)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{d_m^{(4)}}{z^{n}}.$$

После этого непосредственно подставляя эти разложения в формулы (4); устанавливаем, что функции $\phi_1(z)$ и $\phi_2(z)$ регулярны в окрестности точки $z=a_1$ и $z=a_2$. В окрестности точки $z=a_3$ функция $\phi_1(z)$ имеет полюс 1-го порядка. Обозначим $\operatorname*{res}_{a_3}\phi_1(z) = q.$ В окрестности точки $z = a_3$ функция $\phi_2(z)$ имеет полюс 1-го порядка и $\operatorname*{res}_{a_3}\phi_2(z) = -1.$

В окрестности точки $z = \infty$ функция $\phi_1(z)$ имеет нуль 2-го порядка, а функция $\phi_2(z)$ – нуль 1-го порядка, причем $\operatorname*{res}_{\infty}\phi_2(z) = 2n - 1.$

Так как

$$\sum_{k=1}^{3}\operatorname*{res}_{a_k}\phi_2(z) + \operatorname*{res}_{\infty}\phi_2(z) = 0,$$

то $0 + 0 - 1 + 2n - 1 = 0,$ откуда находим $n = 1.$

Таким образом $\phi_1(z) = \dfrac{q}{z - a_3},$ $\phi_2(z) = 0,$ а матрица $X(z)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{dX}{dz} = X\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \dfrac{q}{z - a_3} \\ \dfrac{1}{(z - a_1)(z - a_2)} & \mathbf{0} \end{pmatrix},$$

которое можно переписать в виде регулярной системы д.у.

$$\frac{dX}{dz} = X\sum_{k=1}^{n}\frac{u_k}{z - a_k}, \tag{5}$$

где

$$U_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ (a_1 - a_2)^{-1} & \mathbf{0} \end{pmatrix},\ U_2 = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ (a_2 - a_1)^{-1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, U_3 = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & q \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix},$$

q – некоторый параметр, подлежащий дальнейшему определению. Для этого используем следующие условия подобия матриц:

$$\begin{aligned} U_1 + U_2 &\sim \frac{1}{2\pi i}\ln(V_1V_2), \\ U_2 + U_3 &\sim \frac{1}{2\pi i}\ln(V_2V_3). \end{aligned} \tag{6}$$

Поскольку $V_1V_2 = E$ и $\ln E = 0,$ первое условие выполняется. Далее находим матрицу

$$V_2V_3 = \begin{pmatrix} 1 & \Delta_2 \\ -\Delta_1 & 1 - \Delta_1\Delta_2 \end{pmatrix}$$

и ее характеристические числа

$$\alpha = \frac{1}{2}\left(2 - \Delta_1\Delta_2 + \sqrt{4 + \Delta_1^2\Delta_2^2}\right),\ \beta = \frac{1}{\alpha},$$

а также матрицу

$$U_2+U_3=\begin{pmatrix} \mathbf{0} & q \\ \dfrac{1}{a_2-a_1} & \mathbf{0} \end{pmatrix},\ \det\left(U_2+U_3\right)=\frac{q}{a_1-a_2}.$$

Тогда характеристические числа матрицы $\frac{1}{2\pi i}\ln\left(V_2V_3\right)$ будут равны $\frac{1}{2\pi i}\ln\alpha$ и $-\frac{1}{2\pi i}\ln\alpha$.

Следовательно, второе из условий подобия (6) будет выполняться, если

$$\frac{q}{a_1-a_2}=-\left(\frac{1}{2\pi i}\ln\alpha\right)^2=\frac{1}{4\pi^2}\ln^2\alpha,$$

Откуда находим значения параметра

$$q=\frac{1}{4\pi^2}\left(a_1-a_2\right)\ln^2\alpha.$$

Составим д.у. класса Фукса, которое эквивалентно регулярной системе д.у. (4). Подставим в уравнение (4) матрицу $X(z)$:

$$\frac{d}{dz}\begin{pmatrix} y_1 & p(z)y_1' \\ y_2 & p(z)y_2' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} y_1 & p(z)y_1' \\ y_2 & p(z)y_2' \end{pmatrix}\times$$

$$\times\left[\frac{\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \left(a_1-a_2\right)^{-1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}}{z-a_1}+\frac{\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \left(a_2-a_1\right)^{-1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}}{z-a_2}+\frac{\begin{pmatrix} \mathbf{0} & q \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}}{z-a_3}\right].$$

Приравнивая элементы первой строки матриц справа и слева, получим два дифференциальных уравнения

$$y_1'=\left(\frac{p(z)}{\left(a_1-a_2\right)\left(z-a_1\right)}+\frac{p(z)}{\left(a_2-a_1\right)\left(z-a_2\right)}\right)y_1',$$

$$p'(z)y_1+p(z)y_1''=\frac{q}{z-a_3}y_1.$$

Аналогичные уравнения получаем и для функции y_2.

Первое уравнение является тождеством, а второе уравнение можно переписать в виде

$$y''+\frac{p'(z)}{p(z)}y'-\frac{q}{p(z)\left(z-a_3\right)}y=0$$

или

$$y'' + \left(\frac{1}{z-a_1} + \frac{1}{z-a_2} \right) y' + \frac{\Delta_1 \Delta_2 (a_1 - a_2)}{4\pi^2 (z-a_1)(z-a_2)(z-a_3)} y = 0.$$

Это дифференциальное уравнение класса Фукса, решением которого являются функции y_1, y_2. Решения этого уравнения ищутся в виде степенных рядов, коэффициенты которых находятся по рекуррентным формулам.

Таким образом, нам удается найти все элементы канонической матрицы $X(z)$ задачи (1) и построить ее явное решение в виде степенных рядов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Болибрух А.А. Обратные задачи монодромии аналитической теории дифференциальных уравнений. М: МЦНМО. – 2009. – 218с.
2. Сильвестров В.В., Мочалов Е.В. Напряженное состояние кусочно–однородной упругой плоскости с тонкими жесткими прямолинейными включениями, расположенными по линии раздела сред. // Мех. композиционных материалов и конструкций. – 2010. – т.16,№2. – С.197–213.
3. Васильева Ю.О., Сильвестров В.В. Задача о межфазной трещине с жесткой накладкой на части ее берега // Прикл. матем. и мех. – 2011. – т.75,N6. – С.1017–103.
4. Хвощинская Л.А. К проблеме Римана в случае произвольного числа особых точек. // Труды междунар. конф. «Краевые задачи, специальные функции и дробное исчисление». – 1996. – С.377–382.
5. Хвощинская Л.А. Нахождение акцессорных параметров при решении некоторых краевых задач. //Труды Ин-та математики НАН Беларуси. – 2001.–С.150–160.