МАТРИЦЫ ПОКАЗАТЕЛЕЙ И ИХ КОЛЧАНЫ

Цюпий С.И.

МАУП, Киев, Украина

Понятие матрицы показателей возникло в теории колец. В прикладных задачах матрицы показателей применяют для планирования многофакторных экспериментов с заданными условиями оптимальности, для построения кодов и т.п. С каждой матрицей показателей можно связать некоторый граф (колчан) и изучать матрицы показателей методами теории графов. Понятие колчана ввел П. Габриель в связи с классификацией конечномерных алгебр с нулевым квадратом радикала. Колчан приведённой матрицы показателей является простым (без кратных петель и кратных стрелок) сильно связным ориентированным графом, известны также примеры таких графов, которые не являются колчанами матриц показателей [1]. Проблеме описания графов, которые являются колчанами приведённых матриц показателей, и посвящена данная работа. Также в работе вводится понятие рекурсивной цепи колчана и показана связь рекурсивной цепи в колчане матрицы показателей и треугольности этой матрицы.

Важной особенностью работы является широкое использование методов компьютерной алгебры. Автором разработаны компьютерные программы, с помощью которых построено около двух тысяч примеров матриц показателей и их колчанов. Гипотезы про свойства матриц показателей и их колчанов базировались на анализе этих примеров, на них также проверялись полученные результаты.

Пусть $\mathrm{M}_n(\mathrm{Z})$ – кольцо квадратных матриц порядка n над кольцом целых чисел.

Матрица $\varepsilon = (\alpha_{ij})$ из кольца $\mathrm{M}_n(\mathrm{Z})$ называется *матрицей показателей*, если выполняются следующие условия:

(i) $\alpha_{ii} = 0$ для всех $i = 1, 2, \ldots, n$;

(ii) $\alpha_{ik} + \alpha_{kj} \geq \alpha_{ij}$ для всех $i, j, k = 1, 2, \ldots, n$.

Соотношения (ii) называют кольцевыми неравенствами.

Матрица показателей $\varepsilon = (\alpha_{ij})$ называется *приведённой*, если $\alpha_{ij} + \alpha_{ji} > 0$ для всех $i \neq j$. Отметим, что при изучении матриц показателей достаточно рассматривать только приведённые матрицы показателей.

Пусть ε – приведённая матрица показателей, E – единичная матрица. Обозначим $\varepsilon^{(1)} = \varepsilon + \mathrm{E} = (\beta_{ij})$, $\varepsilon^{(2)} = (\gamma_{ij})$, где $\gamma_{ij} = \min_k \left\{\beta_{ik} + \beta_{kj}\right\}$.

Граф Q называется *колчаном* матрицы показателей ε, если матрица смежности Q равна $\varepsilon^{(2)} - \varepsilon^{(1)}$.

Две матрицы показателей называются *эквивалентными*, если одну из них можно получить из другой преобразованиями следующих двух видов:

1) вычитанием целого числа от всех элементов некоторой строки с одновременным прибавлением этого числа ко всем элементам столбца с таким же номером;
2) одновременной перестановкой двух строк и двух столбцов с одинаковыми номерами.

Отметим, что любая матрица показателей эквивалентна некоторой матрице показателей с неотрицательными элементами. Отметим также, что при первом преобразовании колчан матрицы показателей не изменяется, а при втором преобразовании изменяется только нумерация вершин колчана, а вид колчана не изменяется.

В данной работе рассматривается задача описания графов, которые являются колчанами приведённых матриц показателей.

Пусть G – простой сильно связный ориентированный граф с n $(\mathrm{n} \geq 2)$ вершинами. Требуется найти условия, при которых граф G будет или не будет колчаном некоторой матрицы показателей.

Теорема 1. *Каждый простой сильно связный ориентированный граф* G*, который имеет не меньше двух вершин и петлю в каждой вершине, является колчаном некоторой матрицы показателей.*

Доказательство. Построим матрицу показателей $\varepsilon = (\alpha_{\mathrm{ij}})$ следующим образом: α_{ij} $(\mathrm{i} \neq \mathrm{j})$ равно длине кратчайшего пути из вершины i в вершину j графа G; $\alpha_{\mathrm{ii}} = 0$. Докажем, что граф G является колчаном этой матрицы показателей.

Пусть $\varepsilon^{(1)} = (\beta_{\mathrm{ij}})$, $\varepsilon^{(2)} = (\gamma_{\mathrm{ij}})$, $[\mathrm{Q}(\varepsilon)] = (\mathrm{q}_{\mathrm{ij}})$. Поскольку длина кратчайшего пути из одной вершины графа G в другую не меньше 1, то для элементов матрицы показателей, которые не стоят на главной диагонали, имеем $\alpha_{\mathrm{ij}} \geq 1$ для всех $\mathrm{i} \neq \mathrm{j}$, для всех элементов β_{ij} матрицы $\varepsilon^{(1)}$ имеем $\beta_{\mathrm{ij}} \geq 1$, для всех элементов γ_{ij} матрицы $\varepsilon^{(2)}$ имеем $\gamma_{\mathrm{ij}} \geq 2$. Тогда $\gamma_{\mathrm{ii}} = 2$ для всех i, так как всегда $\gamma_{\mathrm{ii}} \geq 2$.

Рассмотрим элемент $\mathrm{q}_{\mathrm{ss}} = \gamma_{\mathrm{ss}} - \beta_{\mathrm{ss}}$ для произвольного s. Поскольку $\beta_{\mathrm{ss}} = 1$, $\gamma_{\mathrm{ss}} = 2$, то $\mathrm{q}_{\mathrm{ss}} = 1$. Это значит, что колчан $\mathrm{Q}(\varepsilon)$ имеет петлю в каждой вершине.

Пусть граф G имеет стрелку из вершины u в вершину v $(\mathrm{u} \neq \mathrm{v})$. Это значит, что длина кратчайшего пути из вершины u графа G в вершину v равна 1, следовательно $\alpha_{\mathrm{uv}} = \beta_{\mathrm{uv}} = 1$. Тогда $\gamma_{\mathrm{uv}} \leq \beta_{\mathrm{uv}} + \beta_{\mathrm{vv}} = 2$, откуда, учитывая неравенство $\gamma_{\mathrm{ij}} \geq 2$, имеем $\gamma_{\mathrm{uv}} = 2$. Тогда $\mathrm{q}_{\mathrm{uv}} = \gamma_{\mathrm{uv}} - \beta_{\mathrm{uv}} = 1$. Это значит, что колчан $\mathrm{Q}(\varepsilon)$ имеет стрелку из вершины u в вершину v.

Мы доказали, что $\mathrm{G} \subseteq \mathrm{Q}(\varepsilon)$.

Докажем обратное включение. Допустим, что колчан $Q(\varepsilon)$ имеет стрелку из вершины u в вершину v $(u \neq v)$, то есть $q_{uv} = 1$ или $q_{uv} = \min_k \{\beta_{uk} + \beta_{kv} - \beta_{uv}\} = 1$, откуда $\beta_{uk} + \beta_{kv} - \beta_{uv} \geq 1$ для всех k. Тогда для каждого $k \notin \{u; v\}$ получаем $\alpha_{uk} + \alpha_{kv} - \alpha_{uv} \geq 1$ или $\alpha_{uk} + \alpha_{kv} > \alpha_{uv}$.

Допустим, что $\alpha_{uv} \geq 2$, т.е. из вершины u в вершину v графа G стрелки нет, а кратчайший путь между этими вершинами имеет длину не меньшую, чем 2. Обозначим через k_0 вершину этого пути, первую после вершины u. Очевидно, что $k_0 \neq v$ и длина пути из вершины k_0 в вершину v равна $\alpha_{k_0 v}$. Следовательно, существует такое $k_0 \notin \{u; v\}$, что $\alpha_{uk_0} + \alpha_{k_0 v} = \alpha_{uv}$. Это противоречит неравенствам $\alpha_{uk} + \alpha_{kv} > \alpha_{uv}$ для всех $k \notin \{u; v\}$, следовательно $\alpha_{uv} < 2$. Тогда, учитывая неравенство $\alpha_{uv} \geq 1$, получаем $\alpha_{uv} = 1$. Это значит, что граф G имеет стрелку из вершины u в вершину v $(u \neq v)$.

Мы доказали, что $Q(\varepsilon) \subseteq G$. Из доказанных включений следует, что $Q(\varepsilon) = G$. Теорема доказана .

Теорема 2. *Все возможные колчаны приведённых матриц показателей с* n *вершинами и* n *петлями можно получить, рассматривая матрицы показателей, все элементы которых не превышают* $n-1$.

Доказательство теоремы 2 следует из того, что все элементы матрицы показателей, построенной в теореме 1, не превышают $n-1$.

Теорема 3. *Простой сильно связный ориентированный граф с* n *вершинами и* $n-1$ *петлёй не может быть колчаном матрицы показателей.*

Доказательство. Допустим от противного, что существует матрица показателей ε, колчан которой имеет n вершин и $n-1$ петлю. Не ограничивая общности можно считать, что колчан $Q(\varepsilon)$ имеет петли во всех вершинах, кроме n-й. Пусть $\varepsilon^{(1)} = (\beta_{ij})$, $[Q(\varepsilon)] = (q_{ij})$. Тогда $q_{nn} = \min_k \{\beta_{nk} + \beta_{kn} - \beta_{nn}\} = 0$, откуда следует, что существует такое k_0 $(k_0 \neq n)$, что $\beta_{nk_0} + \beta_{k_0 n} = 1$. Учитывая, что $\beta_{nn} = \beta_{k_0 k_0} = 1$, получаем $q_{k_0 k_0} = \min_k \{\beta_{k_0 k} + \beta_{kk_0} - \beta_{k_0 k_0}\} = 0$, т.е. колчан $Q(\varepsilon)$ не имеет петли в вершине k_0. Это противоречит предположению о том, что колчан $Q(\varepsilon)$ имеет петли во всех вершинах, кроме n-й. Теорема доказана .

Для произвольных целых чисел n и m, которые удовлетворяют условиям $n \geq 3$, $0 \leq m \leq n-2$, существуют ориентированные графы с n вершинами и m петлями, которые являются колчанами матриц показателей и существуют сильно связные ориентированные графы без кратных петель и кратных стрелок с n вершинами и m петлями, которые не могут быть колчанами матриц показателей. В [2, 3] автором предложены методы, которые позволяют получать такие графы и соответствующие матрицы показателей.

Приведём пример матрицы показателей, колчан которой имеет n вершин и m $(m \le n-2)$ петель:

$$\varepsilon = \left(\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array}\right),$$

где A_{11} и A_{22} – квадратные матрицы порядков m и $n-m$ соответственно:

$$A_{11} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 0 \end{pmatrix}; \quad A_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix};$$

$A_{12} = (1)$ и $A_{21} = (1)$ – матрицы размерностей $m \times (n-m)$ и $(n-m) \times m$ соответственно, у которых все элементы равны единице. В случае $m = 0$ матрицы A_{11}, A_{12}, A_{21} отсутствуют.

Тогда матрицей смежности колчана $Q(\varepsilon)$ будет $n \times n$ –матрица:

$$\left[Q(\varepsilon_m)\right] = \left(\begin{array}{c|c} C_{11} & C_{12} \\ \hline C_{21} & C_{22} \end{array}\right)$$

где $C_{11} = (1)$,

$$C_{12} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}; \; C_{21} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}; \; C_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \ddots & \ddots & \dots \\ 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Из вида матрицы $\left[Q(\varepsilon_m)\right]$ следует, что колчан $Q(\varepsilon_m)$ имеет n вершин и m петель.

Следующая теорема позволяет получать сильно связные ориентированные графы без кратных петель и кратных стрелок с n вершинами и m $(m \le n-2)$ петлями, которые не могут быть колчанами матриц показателей.

Теорема 4. *Пусть* ε *– матрица показателей, колчан которой* $Q(\varepsilon)$ *имеет* n *вершин и* m *петель* $(n \ge 3; 0 \le m \le n)$, K_1 *– количество стрелок (без петель) колчана* $Q(\varepsilon)$. *Если* $K_1 > n^2 - 2n + 2$, *то петля есть в каждой вершине (т.е.* $m = n$ *).*

Исследуем треугольные приведённые матрицы показателей с неотрицательными элементами и их колчаны [4]. Поскольку колчан матрицы показателей является простым графом, то будем обозначать путь в колчане следующим образом:

$$v_1 \to v_2 \to v_3 \to \ldots \to v_s,$$

где $v_1, v_2, \ldots, v_s$ – вершины колчана.

Если все вершины различны, то путь называется простым путём или цепью длины s и обозначается L_s; если $v_1 = v_s$, а все остальные вершины различны, то путь называется простым циклом C_{s-1}.

Введём понятие рекурсивной цепи колчана.

Определение. Простой путь L_n произвольного колчана Q с n вершинами назовём *рекурсивной цепью*, если выполняются следующие условия:

(i) все вершины колчана Q принадлежат L_n;

(ii) колчан Q не имеет стрелок из любой вершины L_n во все следующие вершины L_n, за исключением соседней.

Отметим, что рекурсивные цепи существуют, если число вершин колчана не меньше 3, и колчан может иметь более одной рекурсивной цепи. Например, простой цикл C_n имеет n рекурсивных цепей.

Теорема 5. *Матрица показателей ε является треугольной с точностью до эквивалентности тогда и только тогда, когда колчан $Q(\varepsilon)$ имеет рекурсивную цепь.*

Это означает, что с точностью до перестановочных преобразований матрица смежности колчана $Q(\varepsilon)$ имеет вид:

$$[Q(\Lambda)] = \begin{pmatrix} * & 1 & 0 & & 0 \\ & * & 1 & \ddots & \\ & & * & \ddots & 0 \\ & * & & \ddots & 1 \\ & & & & * \end{pmatrix}, \tag{1}$$

где символом “ * ” обозначены элементы, которые равны 0 или 1.

Для доказательства теоремы 5 нам необходима следующая лемма.

Лемма. *Пусть $\varepsilon = (\alpha_{ij})$ – приведённая матрица показателей и её колчан $Q(\varepsilon)$ имеет рекурсивную цепь*

$$L_n : v_1 \to v_2 \to v_3 \to \ldots \to v_s \to v_n.$$

Тогда при $j > i$ для элементов матрицы показателей ε справедливы соотношения

$$\left.\begin{aligned} &\alpha_{ij} = \alpha_{ik} + \alpha_{kj}, \text{ если } i < k < j; \\ &\alpha_{ij} < \alpha_{ik} + \alpha_{kj}, \text{ если } k < i \text{ или } k > j \end{aligned}\right\}. \tag{2}$$

Доказательство. Произвольный элемент q_{ij} $(i \neq j)$ матрицы смежности $[Q(\varepsilon)]$ определяется по формуле $q_{ij} = \min\limits_{k:k\neq i,k\neq j}\{1;\alpha_{ik}+\alpha_{kj}-\alpha_{ij}\}$. Из этого следует, что в случае, когда колчан $Q(\varepsilon)$ не имеет стрелки из вершины i в вершину j (т.е. $q_{ij}=0$), всегда найдется такой номер k_0 $(k_0 \neq i, k_0 \neq j)$, что будет выполняться равенство $\alpha_{ij}=\alpha_{ik_0}+\alpha_{k_0 j}$, а в случае, когда колчан $Q(\varepsilon)$ имеет стрелку из вершины i в вершину j (т.е. $q_{ij}=1$), для всех k $(k_0 \neq i, k_0 \neq j)$ справедливы неравенства $\alpha_{ij}<\alpha_{ik}+\alpha_{kj}$.

Поскольку $q_{i,i+1}=1$, то при $j=i+1$ мы имеем $\alpha_{i,i+1}<\alpha_{ik}+\alpha_{k,i+1}$ $\forall k: k\neq i, k\neq i+1$, то есть при $j=i+1$ соотношения (2) справедливы.

Для $j>i+1$ соотношения (2) доказываются методом математической индукции по парам (i,j). Множество пар (i,j) рассматривается как лексикографически упорядоченное: $(1,3),(1,4),\ldots,(1,n),(2,4),(2,5),...,$ $(2,n),\ldots,(n-2,n)$. База индукции и индуктивный шаг доказываются методом от противного.

Это завершает доказательство леммы.

Доказательство **теоремы 5**. *Необходимость*. Пусть $\varepsilon=(\alpha_{ij})$ – нижняя треугольная матрица показателей.

Рассмотрим элемент q_{mj} матрицы смежности колчана $Q(\varepsilon)$, который находится над первой наддиагональю ($j\geq m+2$): $q_{mj}=\min\limits_{k:k\neq m,k\neq j}\{1;\alpha_{mk}+\alpha_{kj}-\alpha_{mj}\}$. При $k=m+1$, учитывая треугольность матрицы показателей ε, имеем $\alpha_{m,m+1}+\alpha_{m+1,j}-\alpha_{mj}=0$, откуда $q_{mj}=0$, т.е. для всех $m=1,2,\ldots,n-2$ из вершины m колчана $Q(\varepsilon)$ нет стрелок в вершины с номерами большими, чем $m+1$.

Рассмотрим произвольный элемент $q_{m,m+1}$ первой наддиагонали матрицы $[Q(\varepsilon)]$: $q_{m,m+1}=\min\limits_{k:k\neq m,k\neq m+1}\{1;\alpha_{mk}+\alpha_{k,m+1}-\alpha_{m,m+1}\}$. Учитывая треугольность и приведённость матрицы показателей ε, при $k<m$ имеем $\alpha_{mk}+\alpha_{k,m+1}-\alpha_{m,m+1}=\alpha_{mk}+0-0=\alpha_{mk}\geq 1$, а при $k>m+1$ $\alpha_{mk}+\alpha_{k,m+1}-\alpha_{m,m+1}=0+\alpha_{k,m+1}-0=\alpha_{k,m+1}\geq 1$, откуда получаем $q_{m,m+1}=1$, т.е. из каждой вершины m колчана $Q(\varepsilon)$ всегда есть стрелка в вершину $m+1$ для всех $m=1,2,\ldots,n-1$.

Следовательно, нижняя треугольная матрица показателей всегда имеет рекурсивную цепь. Для верхней треугольной матрицы показателей доказательство аналогичное.

Достаточность. Пусть колчан $Q(\varepsilon)$ удовлетворяет условию теоремы, то есть его матрица смежности имеет вид (1). Докажем, что матрица показателей ε эквивалентна треугольной матрице показателей. При доказательстве будем делать только следующие преобразования матрицы показателей ε: будем одновременно вычитать от некоторой строки и прибавлять к столбцу с тем же номером целое число. При таких преобразованиях матрицы ε кольцевые неравенства остаются неравенствами, а равенства – равенствами. Колчан $Q(\varepsilon)$ при этом не изменяется.

Рассмотрим возможные случаи вида матрицы $\varepsilon = (\alpha_{ij})$:

(i) $\alpha_{1n} = 0$. Тогда из леммы следует, что $\alpha_{ij} = 0 \ \forall i, j : j > i$, т.е. матрица показателей ε треугольная.

(ii) $\alpha_{12} = \alpha_{13} = \ldots = \alpha_{1,n-1} = 0 \neq \alpha_{1n} := \mu_1$. Тогда из леммы следует, что $\alpha_{ij} = 0$ для всех $i < j < n$ и $\alpha_{in} = \mu_1$ для всех $i \neq n$. Вычтем из элементов n-го столбца и прибавим к элементам n-й строки матрицы ε число μ_1. Получим треугольную матрицу показателей.

(iii) $\alpha_{12} = \alpha_{13} = \ldots = \alpha_{1,n-1} := \mu_2 \neq 0$; $\alpha_{1n} > \mu_2$. Вычтем из элементов первой строки и прибавим к элементам первого столбца число μ_2. Получим матрицу показателей, которая удовлетворяет условию (ii).

(iv) $\alpha_{12} = \alpha_{13} = \ldots = \alpha_{1n} := \mu_3 > 0$. Вычтем из элементов первой строки и прибавим к элементам первого столбца число μ_3. Получим треугольную матрицу показателей.

(v) $\alpha_{12} = \alpha_{13} = \ldots = \alpha_{1p} := \mu_4 < \alpha_{1,p+1}$ $\left(2 \le p \le n-2\right)$. Вычтем из элементов первой строки и прибавим к элементам первого столбца μ_4. Потом применим следующую процедуру. Последовательно для $k = p, p-1, \ldots, 2$ будем вычитать из элементов k-й строки и прибавлять к элементам k-го столбца $\nu_k := \min\{\alpha_{k,k-1}, \alpha_{k,k+1}\}$. Вследствие кольцевых неравенств, леммы и приведённости матрицы показателей $\nu_p \ge \nu_{p-1} \ge \ldots \ge \nu_2 > 0$. Получим матрицу, у которой $\alpha_{12} =: \mu_5 > 0$. Вычтем из элементов первой строки и прибавим к элементам первого столбца μ_5. В результате такой процедуры получим один из случаев (i), (ii) или (v). Значение α_{1n} при этом уменьшится на положительное число. Если получим случай (v), то снова применим приведенную выше процедуру.

Заметим, что при указанных преобразованиях элементы матрицы показателей остаются неотрицательными. В результате за конечное число преобразований получим треугольную матрицу показателей.

Итак, матрица показателей ε эквивалентна треугольной матрице показателей. Теорема 5 доказана.

Полученные результаты имеют теоретический характер и могут быть использованы для исследований в теории представлений и современной структурной теории колец. Они также могут использоваться при чтении спецкурсов. В дальнейшем планируется продолжение исследования поставленной проблемы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Gubareni N.M., Kirichenko V.V. Rings and modules. – Chestochowa, Wyd. Politechn. Chestochowa. – 2001. – 306p.
2. Цюпій С.І. Про множину сагайдаків напівмаксимальних кілець // Наукові вісті НТУУ «КПІ». – 2004. – № 6 (38). – С.143–148.
3. Цюпій С. Підсагайдаки сагайдаків черепичних порядків // Вісник Київського університету. Математика та механіка. – 2007. – № 18. – С. 80–84.
4. Цюпій С.І. Властивості трикутних порядків // Наукові вісті Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут». – 2005. – в.1(39). – С.144–151.