ИНДЕКСЫ ПОЛУСОВЕРШЕННЫХ КОЛЕЦ

Цюпий Т.И.

НУБиП Украины, Киев, Украина

Понятие индекса полусовершенного кольца введено для изучения строения таких колец [1]. В данной работе исследуются индексы различных классов полусовершенных колец [2]. Используются методы теории колчанов и теории колец и модулей.

Все кольца, которые рассматриваются в работе, являются ассоциативными с $1 \neq 0$, а модули – правыми и унитарными.

Пусть A – кольцо, $R = \mathrm{Rad}\, A$ – радикал Джекобсона кольца A.

Кольцо A называется полусовершенным, если факторкольцо A/R артиново и идемпотенты можно поднимать по модулю радикала R.

Кольцо A называется полудистрибутивным справа (слева), если правый регулярный модуль A_A (левый регулярный модуль ${}_A A$) является полудистрибутивным модулем. Полудистрибутивное справа и слева кольцо называется полудистрибутивным.

Кольцо A называется полупервичным, если оно не имеет ненулевых нильпотентных идеалов.

Кольцо A называется первичным, если произведение двух произвольных ненулевых идеалов этого кольца отлично от нуля.

Кольцо A называется слабопервичным, если произведение произвольных двусторонних идеалов, которые не принадлежат радикалу Джекобсона R кольца A, отлично от нуля.

Черепичными порядками (tiled orders) называют первичные кольца вида

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \vartheta & \pi^{\alpha_{12}}\vartheta & \cdots & \pi^{\alpha_{1n}}\vartheta \\ \pi^{\alpha_{21}}\vartheta & \vartheta & \cdots & \pi^{\alpha_{2n}}\vartheta \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \pi^{\alpha_{n1}}\vartheta & \pi^{\alpha_{n2}}\vartheta & \cdots & \vartheta \end{pmatrix}, \qquad (1)$$

где $n \geq 1$, ϑ – дискретно нормированное кольцо с простым элементом π, α_{ij} – целые и $\alpha_{ik} + \alpha_{kj} \geq \alpha_{ij}$ для всех i, j, k, $\alpha_{ii} = 0$ для всех i (эти соотношения называют кольцевыми неравенствами).

Можно считать с точностью до изоморфизма, что все α_{ij} целые неотрицательные числа.

Замечание. Мы рассматриваем кольцо ϑ, которое вложено в его тело частных D.

Обозначим через $M_n(D)$ кольцо всех квадратных матриц порядка n с коэффициентами из тела D.

Кольцо Λ вида (1) с классическим кольцом частных $Q = M_n(D)$ будем записывать с помощью матрицы показателей $\varepsilon(\Lambda) = (\alpha_{ij})$ и дискретно нормированного кольца ϑ с телом частных D: $\Lambda = \{\vartheta, \varepsilon(\Lambda)\}$.

Полусовершенное кольцо A называется приведённым, если его факторкольцо по радикалу Джекобсона является прямой суммой тел. Это значит, что в разложении кольца A в прямую сумму главных A–модулей нет изоморфных. Любое полусовершенное кольцо эквивалентно в смысле Мориты приведённому кольцу. Черепичный порядок $\Lambda = \{\vartheta, \varepsilon(\Lambda)\}$ является приведённым тогда и только тогда, когда матрица $\varepsilon(\Lambda) = (\alpha_{ij})$ не имеет симметричных нулей.

Пусть A – нётерово справа полусовершенное кольцо, R – его радикал Джекобсона, $P_1, P_2, \dots, P_n$ – все попарно неизоморфные неразложимые проективные модули. Пусть проективное накрытие $P(P_iR)$ модуля P_iR имеет вид:

$$P(P_iR) = \bigoplus_{j=1}^{n} P_j^{t_{ij}}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n.$$

Сопоставим модулям $P_1, P_2, \dots, P_n$ точки (вершины) $1, 2, \dots, n$ и соединим вершину с вершиной t_{ij} стрелками.

Полученный граф называется колчаном нётерова справа полусовершенного кольца A и обозначается $Q(A)$. Заметим, что колчан нётерова полусовершенного кольца не изменяется при переходе к кольцам, которые эквивалентны в смысле Мориты.

Введём понятие индекса полусовершенного кольца

Определение. Пусть A – полусовершенное кольцо, $Q(A)$ – колчан кольца A, $[Q(A)]$ – матрица смежности колчана $Q(A)$. Действительное положительное собственное число матрицы $[Q(A)]$, которое является наибольшим по абсолютной величине, будем называть *индексом* кольца A и обозначать $\operatorname{in} A$.

Теорема 1. *Пусть* A *– полусовершенное полудистрибутивное кольцо. Тогда* $0 \le \operatorname{in} A \le n$, *где* n *– число вершин колчана* $Q(A)$.

Доказательство теоремы 1 следует из теоремы Фробениуса и строения колчана такого кольца.

Теорема 2. *Для произвольного целого* i $(1 \le i \le n)$ *существует полусовершенное полудистрибутивное кольцо* A, *колчан которого содержит* n *вершин и* $\operatorname{in} A = i$.

Доказательство. Рассмотрим случай $n \ge 3$. Построим граф G с множеством вершин $VG = \{1, 2, \dots, n\}$ и множеством стрелок AG, которое определим таким образом: стрелка $\sigma : j \to k \quad (j, k = 1, 2, \dots, n,\ j \neq k)$ принадлежит множеству AG, если выполняется одно из двух условий:

$$\text{(i)} \begin{cases} 1 \le j \le n-i, \\ j < k \le i+j; \end{cases} \qquad \text{(ii)} \begin{cases} n-i < j \le n, \\ \left[\begin{array}{l} j < k \le n, \\ k \le i+j-n. \end{array}\right. \end{cases}$$

Рассмотрим алгебру путей $A(G)$ этого конечного графа G. Обозначим J – фундаментальный идеал алгебры $A(G)$, т.е. идеал, порождённый всеми стрелками G. Пусть $A_i = A(G)/J^2$. Понятно, что алгебра A_i полудистрибутивна и $Q(A_i) = G$.

Колчан $Q(A_i)$ содержит n вершин, в каждую вершину колчана $Q(A_i)$ входят i стрелок и из каждой вершины выходят i стрелок, следовательно, его матрица смежности имеет в каждой строке i единиц и $n-i$ нулей, т.е. она кратна стохастической матрице. Следовательно, $\operatorname{in} A_i = i$.

Случай $n = 2$. Рассмотрим черепичные порядки Λ_1, Λ_2 с матрицами показателей

$$\varepsilon(\Lambda_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ и } \varepsilon(\Lambda_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно проверить, что $\operatorname{in} A_1 = 1$, а $\operatorname{in} A_2 = 2$.

Случай $n = 1$ очевидный. Теорема доказана.

Теорема 3. *Следующие условия равносильны для нётерова слабопервичного полусовершенного кольца* A *:*

a) *кольцо* A *полуцепное;*

b) $\operatorname{in} A \le 1$.

Доказательство. a) $\Rightarrow$ b). Пусть кольцо A полуцепное. Тогда колчан $Q(A)$ кольца A сильно связный. Но колчан нётерова полуцепного кольца является несвязным объединением циклов и цепей. Поэтому колчан $Q(A)$ является или циклом, или цепью и, следовательно, $\operatorname{in} A = 1$ или $\operatorname{in} A = 0$, т.е. $\operatorname{in} A \le 1$.

b) $\Rightarrow$ a). Пусть $\operatorname{in} A \le 1$. Рассмотрим два случая.

Случай 1. $Q(A)$ состоит из одной вершины без петель. Тогда $A = M_n(D)$, где D – тело. Поэтому A – простое артиново кольцо, которое является полуцепным кольцом.

Случай 2. Колчан $Q(A)$ является сильно связным графом, в котором есть стрелки. Тогда в матрице $[Q(A)]$ нет нулевых строк и нулевых столбцов. Следовательно, в этом случае $\operatorname{in} A$ всегда не меньше единицы и поэтому $\operatorname{in} A = 1$. Поэтому можно пронумеровать координаты положительного собственного вектора $\vec{Z}=\{z_1, z_2, \dots, z_n\}$ так, чтобы выполнялись неравенства $z_1 \geq z_2 \geq \dots \geq z_n$. Допустим, что $z_1 = z_2 = \dots = z_i$ и $z_i > z_{i+1}$. Тогда $\vec{Z}=\{z_1, \dots, z_1, z_{i+1}, \dots, z_n\}$.

Пусть $i=1$. Тогда $q_{i1}=0$ при $i \geq 2$. Следовательно,

$$[Q(A)] = \begin{pmatrix} 1 & * & \dots & * \\ 0 & * & \dots & * \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & * & \dots & * \end{pmatrix}.$$

Пусть $q_{1j}=1$ при $j \geq 2$. Тогда $z_1 + z_j = z_1$, что ведёт к противоречию. Поэтому из неразложимости $[Q(A)]$ следует, что $[Q(A)] = (1)$.

Пусть теперь $i \geq 2$. Тогда $[Q(A)]$ имеет такой вид

$$[Q(A)] = \left(\begin{array}{c|c} * & * \\ \hline 0 & * \end{array}\right),$$

где верхняя левая клетка имеет размер $i \times i$. Но матрица $[Q(A)]$ перестановочно неприводима. Получили противоречие. Следовательно, $z_1 = z_2 = \dots = z_n$. Поэтому в каждой строке ровно одна единица.

Учитывая сильную связность, получаем, что колчан $Q(A)$ – это простой цикл, который соответствует кольцу $H_n(\vartheta)$ с матрицей показателей

$$\varepsilon\left(H_n(\vartheta)\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

где ϑ – дискретно нормированное кольцо. А такое кольцо является полуцепным. Теорема доказана.

Теорема 4. *Следующие условия равносильны для нётерова справа полупервичного полусовершенного полудистрибутивного кольца* A*:*

a) *кольцо* A *наследственное;*

b) $\text{in}\, A \leq 1$.

Доказательство. a) $\Rightarrow$ b). Наследственное кольцо эквивалентно в смысле Мориты конечному прямому произведению тел и колец вида $H_n(\vartheta)$, где ϑ – дискретно нормированное кольцо. Колчан такого кольца является несвязным объединением точек и некоторого числа простых циклов. Поэтому $\text{in}\, A \leq 1$.

b) $\Rightarrow$ a). Учитывая свойства кольца, получаем, если $\operatorname{in} A = 0$, то кольцо A – полупростое и поэтому наследственное. Если A является черепичным порядком и $\operatorname{in} A = 1$, то в каждой строке и каждом столбце матрицы $[Q(A)]$ стоит ровно одна единица. Так как колчан $Q(A)$ сильно связный, то отсюда следует, что он является простым циклом, и, следовательно, A эквивалентно в смысле Мориты кольцу $H_n(\vartheta)$. Теорема доказана.

Теорема 5. *Индекс наследственного артинова кольца равен нулю.*

Доказательство. Колчан $Q(A)$ наследственного артинова кольца A является ациклическим колчаном без петель. Поэтому матрицу смежности колчана $Q(A)$ можно привести к треугольному виду:

$$[Q(A)] = \begin{pmatrix} 0 & q_{12} & q_{13} & \dots & q_{1n} \\ 0 & 0 & q_{23} & \dots & q_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & q_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

где n – число вершин колчана $Q(A)$, $q_{ij} \ge 0$ для всех $i, j = \overline{1, n}$ таких, что $j > i$.

Характеристический многочлен матрицы $[Q(A)]$ имеет вид $\chi(\lambda) = \lambda^s$. Его корни $\lambda_{1,2,\dots,n} = 0$, откуда получаем $\operatorname{in} A = 0$. Теорема доказана.

Полученные результаты имеют теоретический характер и могут быть использованы для развития методов теории колчанов в современной структурной теории колец. Некоторые из них могут использоваться при чтении спецкурсов по алгебре. Индекс кольца предполагается использовать для классификации колец.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кириченко В.В., Цюпий Т.И. Об индексе полусовершенных колец // Праці конференції «Моделювання та оптимізація складних систем», присвяченої 65-річчю від дня народження члена–кореспондента НАН України Бублика Б.М.– Київ, 25–28 січня 2001. – С.29–30.
2. Цюпий Т.И. Колчаны и индексы полумаксимальных колец // Известия Гомельского государственного университета. – 2001. – Вып.3(6). – С.114–123.