ЗАДАЧА ДИФРАКЦИИ И ОТКРЫТЫЕ РЕЗОНАТОРЫ.

Щербина В.А.

Харьковский национальный университет им.В.Н.Каразина

Рассмотрим краевую задачу для уравнения Гельмгольца и $\mathbb{R}^3 \setminus S$, где разрез S представляет собой гладкую незамкнутую поверхность, не обязательно связную, конечных размеров. На разрезе S ставится второе краевое условие, что позволяет интерпретировать решение тако задачи как потенциал скоростей для звуковых колебаний идеального газа, которые рассеиваются на бесконечнотонком абсолютно жестком экране S и порождаются квазистационарным источником.

Итак, если $u(x)$ – потенциал скоростей, то он должен удовлетворять уравнению

$$\Delta u(\vec{x}) + p^2 u(\vec{x}) = f(\vec{x}), \quad \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus S \tag{1}$$

$$\frac{\partial u(\vec{x})}{\partial \vec{n}(\vec{x})} = 0, \quad \vec{x} \in S \tag{2}$$

Если $f(\vec{x})$ не равна тождественному нулю и финитна, то функция $u(\vec{x})$ должна удовлетворять на бесконечности условию излучения:

$$u(\vec{x}) = a\left(\frac{\vec{x}}{|\vec{x}|}\right)\frac{e^{ip|\vec{x}|}}{|\vec{x}|} + O\left(\frac{1}{|\vec{x}|^2}\right) \quad (|\vec{x}| \to \infty) \tag{3}$$

Здесь волновое число $p = \dfrac{\omega}{c}$, где ω – круговая частота колебаний, c – скорость звука.

Для случая, когда речь идет о рассеянии плоской волны на экране S, правая часть уравнения $f(\vec{x}) = 0$, а условие излучения переходит в равенство

$$u(\vec{x}) = e^{i(\vec{p},\vec{x})} + a\left(\frac{\vec{x}}{|\vec{x}|}\right)\frac{e^{ip|\vec{x}|}}{|\vec{x}|} + O\left(\frac{1}{|\vec{x}|^2}\right) \quad (|\vec{x}| \to \infty),$$

где $p = |\vec{p}|$.

Наконец, наложим на $u(\vec{x})$ условие конечности энергии в любой ограниченной области пространства

$$u \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^3) \tag{4}$$

В обоих случаях решение нашей краевой задачи будем искать в виде

$$u(\vec{x}) = u_0(\vec{x}) + u_1(\vec{x}),$$

где $u_0(\vec{x})$ – решение уравнения (1) во всем $\mathbb{R}^3$, отвечающее условиям (3), или $u_0(\vec{x}) = e^{i(\vec{p},\vec{x})}$, а $u_1(\vec{x})$ – возмущение волны от источника, вызванное наличием экрана S.

Относительно этого возмущения естественно предположить, что оно допускает параметрическое представление вида

$$u_1(\vec{x}) = \int_S \gamma(\vec{y}) \frac{\partial}{\partial \vec{n}(\vec{y})} \frac{e^{ip|\vec{x}-\vec{y}|}}{|\vec{x}-\vec{y}|} ds_y \tag{5}$$

Легко видеть, что неизвестная фнкция $\gamma(\vec{y})$ будет решением псевдодифференциального уравнения вида

$$\lim_{\varepsilon \to 0} (\vec{n}(\vec{x}), \nabla) \int_S \gamma(\vec{y}) \frac{\partial}{\partial \vec{n}(\vec{y})} \frac{e^{ip|\vec{x}_\varepsilon-\vec{y}|}}{|\vec{x}_\varepsilon-\vec{y}|} ds_y = -\frac{\partial u_0(\vec{x})}{\partial \vec{n}(\vec{x})} \tag{6}$$

Здесь $\vec{x}_\varepsilon = \vec{x} + \varepsilon \vec{n}(\vec{x})$.

Как видно из записи, левая часть уравнения не должна зависеть от знака $\varepsilon \to 0$. Именно этим объясняется необходимость представления $u_1(\vec{x})$ в виде потенциала двойного слоя. Потенциал простого слоя нужным свойством не обладает.

Впредь уравнение (6) мы будем записывать в виде

$$\int_S^* \gamma(\vec{y}) \frac{\partial^2}{\partial n(\vec{x}) \partial n(\vec{y})} \frac{e^{ip|\vec{x}-\vec{y}|}}{|\vec{x}-\vec{y}|} ds_y = g(\vec{x})$$

Если оператор в левой части $(6')$ обозначить через $\mathcal{L}(p)$, то уравнение $(6')$ можно переписать в виде

$$(\mathcal{L}(0) + R)\gamma = g \tag{7}$$

Поскольку функция

$$\frac{\partial^2}{\partial n(\vec{y}) \partial n(\vec{x})} \frac{1}{|\vec{x}-\vec{y}|} = \frac{(n(\vec{x}), n(\vec{y}))}{|\vec{x}-\vec{y}|^3} - 3 \frac{(n(\vec{x}), \vec{x}-\vec{y})(n(\vec{y}), \vec{x}-\vec{y})}{|\vec{x}-\vec{y}|^5}$$

имеет на S неинтегрируемую особенность, интеграл $\int_S^*$ понимается в $(6')$ в обобщенном смысле как результат предельного перехода в левой части (6).

Если функция $\gamma(\vec{y})$ принадлежит классу $C^{1+\delta}(S)$, то есть ее первые производные удовлетворяют условию Гельдера для некоторого $\delta > 0$, то левая часть (6), $(6')$ имеет смысл. Это утверждение в более общей формулировке было впервые доказано Ляпуновым. Подробное доказательство приведено в книге Н.М. Гюнтера [1].

Если кривая Γ – граница поверхности S достаточно гладкая, то условие (4) приводит к условию $\gamma(\vec{y}) = 0$ при $\vec{y} \in \Gamma$.

Настоящая работа не имеет своей целью дать исчерпывающие доказательства всех математических фактов, связанных со свойствами функции $\gamma(\vec{y})$ из представления (5). Заинтересованный читатель сможет получить недостающую информацию из прекрасной монографии А.С. Ильинского и Ю.Г. Смирнова [2].

Оператор $\mathcal{L}(0)$ в (7) имеет, очевидно, вид

$$\mathcal{L}(0)\gamma(\vec{x}) = \int_S^* \gamma(\vec{y}) \frac{\partial^2}{\partial \vec{n}(\vec{x}) \partial \vec{n}(\vec{y})} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|} ds_y, \qquad (8)$$

а оператор R – вполне непрерывный интегральный оператор в $L^2(S)$.

Относительно оператора $\mathcal{L}(0)$ легко убедиться, что он положительно определен на плотном в $L^2(S)$ множестве функций. И если принять весьма правдоподобную гипотезу, что он имеет ограниченный обратный, то уравнение $(6')$ можно свести к уравнению Фредгольма второго рода.

Как можно проверить, квадратичная форма

$$\int_S \int_S \overline{\gamma(\vec{x})} \gamma(\vec{y}) \frac{\sin p |\vec{x} - \vec{y}|}{|\vec{x} - \vec{y}|} ds_y ds_x = (\mathcal{I}\gamma, \gamma)$$

строго положительна и лишь множителем отличается от $\int\limits_{|\vec{q}|=1} |a(\vec{q})|^2 \, dS_q$, где $a(\vec{q})$ соответствует в (3) главному члену асимптотики в представлении (5) для $u_1(\vec{x})$.

Если γ – решение однородного уравнения $(6')$, то для нее уравнение $(\mathcal{I}\gamma, \gamma) = 0$, а значит и $a(\vec{q}) \equiv 0$. Отсюда немедленно вытекает, что $u_1(\vec{x}) = 0$ в $\mathbb{R}^3 \setminus S$, и, значит, $\gamma = 0$.

Ввиду легко проверяемой эквивалентности уравнений $\mathcal{L}(p)\gamma = g$ и $(I + \mathcal{L}^{-1}(0)R)\gamma = \mathcal{L}^{-1}(0)g$ каждое из них имеет единственное решение при любом $g \in L^2(S)$.

Отметим, что приведенное доказательство справедливо лишь в случае ограниченной обратимости оператора $\mathcal{L}(0)$.

Сведение граничной задачи (1)–(4) к решению уравнения $(6')$ позволяет численно моделировать рассеянное поле $u_1(\vec{x})$ для экранов S практически любой формы. Высокая эффективность процедуры численного моделирования решений уравнения $(6')$ позволила в ряде случаев исследовать спектральные свойства открытых резонаторов не только для скалярного поля $u_1(\vec{x})$, но и для электромагнитного поля, рассеянного на идеальнопроводящих экранах.

В случае квазистационарного электромагнитного поля вместо вместо уравнения (1) для напряженности $\vec{E}(\vec{x})$ – его электрической составляющей удобно воспользоваться системой вида

$$\begin{cases} \Delta\vec{E}(\vec{x}) + p^2\vec{E}(\vec{x}) = \vec{f}(\vec{x}) \\ (\vec{\nabla}, \vec{E}(\vec{x})) = 0, \quad \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus S \end{cases} \tag{1^*}$$

На идеальнопроводящем экране $\vec{E}(\vec{x})$ должна удовлетворять краевому условию

$$\vec{n}(\vec{x}) \times \vec{E}(\vec{x}) = 0, \quad \vec{x} \in S \tag{2^*}$$

В условии излучения для $\vec{E}_1(\vec{x})$, где как и в скалярной задаче, полное поле $\vec{E}(\vec{x}) = \vec{E}_0(\vec{x}) + \vec{E}_1(\vec{x})$,

$$\vec{E}_1(\vec{x}) = \vec{a}\left(\frac{\vec{x}}{|\vec{x}|}\right)\frac{e^{ip|\vec{x}|}}{|\vec{x}|} + O\left(\frac{1}{|\vec{x}|^2}\right) \tag{3^*}$$

коэффициент $\vec{a}\left(\frac{\vec{x}}{|\vec{x}|}\right)$ – векторнозначная функция, а условие конечности энергии теперь выглядит так:

$$|\vec{E}(\vec{x})|, |\nabla \times \vec{E}(\vec{x})| \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^3) \tag{4^*}$$

Запишем для $\vec{E}_1(\vec{x})$ аналог параметрического представления (5) в виде

$$\vec{E}_1(\vec{x}) = \nabla \times \int_S \left[\vec{j}(\vec{y})\frac{\partial}{\partial\vec{n}(\vec{y})} - K\vec{j}(\vec{y})\right]\frac{e^{ip|\vec{x}-\vec{y}|}}{|\vec{x}-\vec{y}|}ds_y \tag{5^*}$$

Это представление выглядит существенно сложнее, чем для скалярного случая. Отметим сразу же, что $\vec{E}_1(\vec{x})$ есть решение однородной системы (1^*) в $\mathbb{R}^3 \setminus S$. Как можно видеть, выполняется и условие излучения (3^*), причем

$$\vec{a}(\vec{q}) = ip\vec{q} \times \int_S \left[\vec{j}(\vec{y})\frac{\partial}{\partial\vec{n}(\vec{y})} - K\vec{j}(\vec{y})\right]e^{-ip(\vec{q},\vec{y})}ds_y,$$

где $\vec{q} = \dfrac{\vec{x}}{|\vec{x}|}$.

Здесь $\vec{j}(\vec{y}) = j_1(\vec{y})\vec{\tau}_1(\vec{y}) + j_2(\vec{y})\vec{\tau}_2(\vec{y})$, $K\vec{j}(\vec{y}) = k_1(\vec{y})j_1(\vec{y})\vec{\tau}_1(\vec{y}) + k_2(\vec{y})j_2(\vec{y})\vec{\tau}_2(\vec{y})$, где $\vec{\tau}_j(\vec{y})$ – единичные вектора, касательные к линиям кривизны в точке $\vec{y}$, $k_j(\vec{y})$ – соответствующие главные кривизны.

Именно такая комбинация потенциалов простого и двойного слоев, как в представлении (5^*), обеспечивает одинаковое значение касательной составляющей поля $\vec{E}_1(\vec{x})$ на обеих сторонах экрана S, что необходимо ввиду связности области $\mathbb{R}^3 \setminus S$.

Формально любой экран описанного выше типа можно рассматривать как открытый резонатор для квазистационарного поля звуковых или электромагнитных колебаний с $p > 0$. Однако, прежде чем говорить о спектральных свойствах такого резонатора, необходимо поставить спектральную задачу в случае, когда отсутствует полость в пространстве $\mathbb{R}^3$ конечного диаметра, способная удерживать поле неограниченно долго без внешней подпитки.

Спектральные свойства открытого резонатора для электромагнитного поля можно описать следующим образом. Если $\vec{j}(\vec{y})$ на S есть решение задачи дифракции $(1^*)-(4^*)$, то $N(p) = \int\limits_{|\vec{q}|=1} |\vec{a}(\vec{q};p)|^2 \, ds_q$ лишь множителем, связанным с выбранной системой единиц, отличается от мощности потока энергии, отвечающей полю $\vec{E}_1(\vec{x})$.

Будем называть резонансными те значения волнового числа p, которые отвечают локальным максимумам функции $N(p)$.

Значение $N(p)$ для экрана S зависит очевидным образом от касательной составляющей поля $\vec{E}_0(\vec{x})$ на экране S. Однако численные эксперименты показывают, что значения резонансных частот, определенных выше, мало зависят от правой части системы уравнений для определения $\vec{j}(\vec{y})$, полученной из условия (2^*). Здесь имеет место далеко идущая аналогия с задачей об отыскании особых точек обратной матрицы для матрицы $\mathcal{A}(p)$, элементы которой – целые функции от p.

В заключение отметим некоторые свойства системы граничных уравнений, отвечающих задаче дифракции $(1^* - 4^*)$. Из условия (2^*) для искомой векторнозначной плотности $\vec{j}(\vec{y})$ в представлении (5^*) получается уравнение вида

$$\vec{n}(\vec{x}) \times \left[\nabla \times \int\limits_S^* \left[\vec{j}(\vec{y}) \frac{\partial}{\partial \vec{n}(\vec{y})} - K\vec{j}(\vec{y}) \right] \frac{e^{ip|\vec{x}-\vec{y}|}}{|\vec{x}-\vec{y}|} ds_y \right] = \vec{E}_0(\vec{x}) \times \vec{n}(\vec{x}),$$

из которого для пары $j_1(\vec{y}), j_2(\vec{y})$ неизвестных функций можно получить систему уравнений вида

$$\begin{pmatrix} \mathcal{L}(0) & 0 \\ 0 & \mathcal{L}(0) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} j_1 \\ j_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} R_{11}(p) & R_{12}(p) \\ R_{21}(p) & R_{22}(p) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} j_1 \\ j_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Здесь $R_{ik}(p)$ – вполненепрерывные интегральные операторы, а $\mathcal{L}(0)$ имеет вид (8).

Система (9) при условии ограниченной обратимости оператора $\mathcal{L}(0)$ может быть сведена к уравнению Фредгольма второго рода в операторной форме и при доказанной теореме единственности однозначно разрешима при $g_1, g_2 \in L^2(S)$.

В случае, когда экран S – поверхность вращения гладкой кривой $\vec{x}(s) = x_1(s)\vec{e}_1 + x_3(s)\vec{e}_3$ без самопересечений вокруг оси $\vec{e}_3$ и при условии $x_1(s) \geq R > 0$, в [3] приведено доказательство теоремы единственности для системы (9). Здесь $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ – орты осей декартовой системы координат в $\mathbb{R}^3$.

Однако отсутствие теоремы о разрешимости системы (9) не является препятствием для численного моделирования поведения электромагнитного поля при его взаимодействии с открытыми резонаторами специального вида, так называемыми гиротронами. В работах [4], [5] для них удалось численно промоделировать функцию $N(p)$ и определить величину нескольких первых резонансных волновых чисел.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гюнтер Н.М. Теория потенциала и ее применение к основным задачам математической физики. Государственное издательство технико–теоретической литературы. – Москва. – 1953.

2. Ильинский А.С., Смирнов Ю.Г. Дифракция электромагнитных волн на проводящих тонких экранах. Издательское предприятие редакции журнала ``Радиотехника". – Москва. – 1996.

3. Щербина В.А. Дифракция электромагнитных волн на разрезе в $\mathbb{R}^3$. // Электромагнитные явления. Харьков. – 1998. – т.1, №4. – С. 447–450.

4. Жученко С.В. Численное моделирование осесимметричного решения задачи дифракции электромагнитного поля в открытом гофрированном резонаторе. // Электромагнитные явления. Харьков. – 2005. – 5, №1(14). – С. 21–25.

5. Митина И.В. Спектральный анализ открытых и закрытых резонаторов. // Вестник ХНУ им. В.Н. Каразина. Сер. Математика, прикладная математика и механика. – 2007. – 790, № 57. – С. 182–197.