МЕТОД ОПЕРАТОРНЫХ ТОЖДЕСТВ И ЗАДАЧА ОБРАЩЕНИЯ ОДНОГО КЛАССА ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Аршава Е.А.

Харьковский национальный университет
строительства и архитектуры, Харьков, Украина

Постановка общей проблемы и анализ публикаций по теме исследования Метод операторных тождеств был впервые применен В.А. Амбарцумяном при изучении проблем астрофизики [1]. Затем В.В. Соболев [2], В.В. Иванов [3] применили коммутационные соотношения для решения интегральных уравнений, которые возникают в задачах переноса излучения и рассеивания света.

В этих работах использовалась связь интегрального оператора с разностным ядром и оператора дифференцирования, т.е. в коммутационном соотношении присутствовал неограниченный оператор. Такой подход приводил к существенным трудностям при построении общей математической теории.

Наиболее весомый вклад в разработку представленной тематики сделал Л.А. Сахнович [4]. Было предложено вместо оператора дифференцирования использовать несамосопряженный оператор интегрирования. При этом Л.А. Сахновичем рассматривался класс уравнений вида

$$Sf = \frac{d}{dx}\int_0^{\omega} S(x-t)f(t)dt = \phi(x), \tag{1}$$

который является наиболее общим классом уравнений с разностным ядром. Это дало возможность Л.А. Сахновичу с единой точки зрения исследовать различные виды уравнений с разностным ядром как первого, так и второго рода.

Основная идея метода состоит в доказательстве конечномерности соответствующего интегрального оператора. В этом случае обратный оператор к данному интегральному оператору строится при помощи функций, которые определяют вырожденность коммутационного оператора.

В работах И.И. Кальмушевского [5], А.Б. Нерсесяна[6], А.Л. Сахновича [7], А.А. Янцевича, В.А. Золотарева [8] и др. метод операторных тождеств использовался при изучении систем интегральных уравнений с разностным ядром, сумматорных уравнений с матрицей коэффициентов Тёплица, двумерных интегральных уравнений.

Целью представленной публикации является обобщение метода операторных тождеств для обращения других классов интегральных операторов.

Перейдем к изложению основных результатов, полученных автором статьи.

Построение обратного оператора Рассмотрим задачу обращения оператора вида

$$Sf = L_x(\alpha)\int_0^{\omega} S(x,t)f(t)dt, \qquad (2)$$

с ядром $S(x,t)$, которое удовлетворяет дифференциальному уравнению в частных производных гиперболического типа

$$(L_x(\alpha)-L_t(\alpha))S(x,t)=0, \qquad L_x(\alpha)=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\alpha\frac{\partial}{\partial x}, \qquad \alpha=\overline{\alpha}\neq 0. \qquad (3)$$

Теорема 1. *Для любого ограниченного оператора вида (2) с ядром, которое удовлетворяет условиям (3), имеют место соотношения*:

$$(A_0S-SA_0^*)f=\int_0^{\omega}(M_1(x)+\frac{1-e^{-\alpha t}}{\alpha}M_2(x)+M_3(t)+\frac{1-e^{-\alpha x}}{\alpha}M_4(t))f(t)dt, \qquad (4)$$

где

$$A_0=L_x^{-1}(\alpha), \quad M_1(x)=S(x,0), \quad M_2(x)=S'(x,0), \quad M_3(t)=-S(0,t),$$

$$M_4(t)=-S'(0,t), \quad f(t)\in L_2(0,\omega).$$

Следствие. Если оператор S имеет ограниченный обратный T, тогда верно представление: $(TA_0-A_0^*T)f=\int_0^{\omega}R(x,t)f(t)dt,$

где $R(x,t)=\sum_{i=1}^{4}P_i^*(t)Q_i(x),$ кроме того, для $P_i(t),Q_i(x),$ $(i=\overline{1,4})$ выполняются соотношения вида:

$$\begin{aligned}&S^*P_1=1, \quad S^*P_2=M_3^*(t), \quad S^*P_3=M_4^*(t), \quad S^*P_4=\frac{1-e^{-\alpha t}}{\alpha},\\ &SQ_1=M_1(x), \quad SQ_2=1, \quad SQ_3=\frac{1-e^{-\alpha x}}{\alpha}, \quad SQ_4=M_2(x).\end{aligned} \qquad (5)$$

Теорема 2. *Если оператор* S *ограничен вместе со своим обратным и существуют функции* $P_i(t),Q_i(x),$ $(i=\overline{1,4})$ *, которые удовлетворяют соотношениям (5), тогда для оператора* $T=S^{-1}$ *имеет место интегральное представление:*

$$Tf=L_x(\alpha)\int_0^{\omega}f(t)L_t(-\alpha)\Phi(x,t)dt,$$

где $\Phi(x,t)$ *выражается через ядро оператора* $R=TA_0-A_0^*T,$ $f(t)\in L_2(0,\omega).$

Полученные результаты перенесены на случай обобщенных функций вида: $f(x)=\gamma\delta(x)+\beta\delta(\omega-x)+g(x)$, $g(x)\in L_2(0,\omega)$, $\delta(x)$ – дельта–функция Дирака.

Уравнение со специальной правой частью На основе полученных результатов рассмотрим уравнение со специальной правой частью, которое играет существенную роль в астрофизике, теории переноса излучения

$$Sf=e^{i\lambda x},$$

где $S-$ оператор вида (2).

Лемма 1. *Если функции* $M_1(x), M_2(x), x, \dfrac{1-e^{-\alpha x}}{\alpha}$ *и 1, где* $M_1(x)$, $M_2(x)$ *определены формулами (5), принадлежат области значений оператора* S – R_S*, тогда* R_S *плотно в* $L_2(0,\omega)$.

Доказательство. Пусть

$$SL_m=x^{m-1}, \qquad (m=1,2,....). \tag{6}$$

Покажем, что существуют функции L_m, которые удовлетворяют соотношениям (6). Полагая в (4) сначала, $f=\frac{1}{\alpha}L_m$, а потом $f=\frac{1}{m}L_{m+1}$ и складывая полученные результаты, имеем:

$$\frac{x^{m+1}}{\alpha m(m+1)}=S[\int_x^{\omega}\frac{1-e^{\alpha(x-t)}}{\alpha}\left\{\frac{1}{\alpha}L_m+\frac{1}{m}L_{m+1}\right\}dt+\int_0^{\omega}\left\{\frac{1}{\alpha}L_m+\frac{1}{m}L_{m+1}\right\}dt\cdot N_1(x)+$$
$$+\int_0^{\omega}\frac{1-e^{-\alpha t}}{\alpha}\left\{\frac{1}{\alpha}L_m+\frac{1}{m}L_{m+1}\right\}dt\cdot N_2(x)+\int_0^{\omega}M_3(t)\left\{\frac{1}{\alpha}L_m+\frac{1}{m}L_{m+1}\right\}dt\cdot N_3(x)+$$
$$+\int_0^{\omega}M_4(t)\left\{\frac{1}{\alpha}L_m+\frac{1}{m}L_{m+1}\right\}dt\cdot N_4(x)],$$

где функции $N_i(x), i=\overline{1,4}$, такие, что

$$SN_1=M_1(x), SN_2=M_2(x), SN_3=1, SN_4=\frac{1-e^{-\alpha x}}{\alpha}.$$

Эти функции существуют, так как $M_1(x), M_2(x), 1, \dfrac{1-e^{-\alpha x}}{\alpha}$ из R_S.

Следовательно,

$$\frac{L_{m+2}}{m(m+1)}=\int_x^{\omega}\frac{1-e^{\alpha(x-t)}}{\alpha}\left\{L_m+\frac{\alpha}{m}L_{m+1}\right\}dt+\int_0^{\omega}\left\{L_m+\frac{\alpha}{m}L_{m+1}\right\}dt\cdot N_1(x)+$$
$$+\int_0^{\omega}\frac{1-e^{-\alpha t}}{\alpha}\left\{L_m+\frac{\alpha}{m}L_{m+1}\right\}dt\cdot N_2(x)+\int_0^{\omega}M_3(t)\left\{L_m+\frac{\alpha}{m}L_{m+1}\right\}dt\cdot N_3(x)+ \quad (7)$$
$$+\int_0^{\omega}M_4(t)\left\{L_m+\frac{\alpha}{m}L_{m+1}\right\}dt\cdot N_4(x).$$

По условию существуют $L_1(x)=N_3(x), L_2(x)=S^{-1}x$. Соотношения (7) определяют все последующие члены последовательности $L_m(x)$. Таким образом, $x^m\in R_s$ при $m=0,1,2,........$

Лемма 2. *Пусть существуют такие функции* $N_i\in L_2(0,\omega), i=\overline{1,4}$, *что выполняются равенства:*

$$SN_1=M_1(x), SN_2=M_2(x), SN_3=1, SN_4=\frac{1-e^{-\alpha x}}{\alpha}. \quad (8)$$

Тогда верны соотношения:

$$S^*\hat{M}_1=1, S^*\hat{M}_2=\frac{1-e^{-\alpha t}}{\alpha}, S^*\hat{M}_3=\overline{M_3(t)}, S^*\hat{M}_4=\overline{M_4(t)},$$

где

$$\hat{M}_1(t)=\overline{N_3(\omega-t)}, \qquad \hat{M}_2(t)=\overline{N_4(t)},$$
$$\hat{M}_3(t)=\frac{1-e^{\alpha(\omega-t)}}{\alpha}+\overline{N_1(\omega-t)}-\frac{1-e^{\alpha\omega}}{\alpha}\overline{N_2(t)},$$
$$\hat{M}_4(t)=-\alpha\overline{N_1(\omega-t)}-\overline{N_2(\omega-t)}-\alpha\overline{N_1(t)}-1.$$

Теорема 3. *Если оператор* S *ограниченный и существуют функции* $N_i\in L_2(0,\omega), i=\overline{1,4}$, *удовлетворяющие равенствам (8), тогда имеют место соотношения:* $SB(x,\lambda)=e^{i\lambda x}$, *где*

$$B(x,\lambda)=u(x,\lambda)+\frac{i\lambda\alpha-\lambda^2}{\alpha+2i\lambda}\int_0^x u(t,\lambda)\cdot\left(e^{i\lambda(t-x)}+e^{(\alpha+i\lambda)(x-t)}\right)dt,$$
$$u(x,\lambda)=a(\lambda)N_1(x)+b(\lambda)N_2(x)+c(\lambda)N_3(x)+d(\lambda)N_4(x),$$
$$a(\lambda)=\int_0^{\omega}e^{i\lambda t}\left(i\lambda\alpha-\lambda^2\right)N_3(\omega-t)dt,\ \ b(\lambda)=\int_0^{\omega}e^{i\lambda t}\left(i\lambda\alpha-\lambda^2\right)N_4(t)dt,$$
$$c(\lambda)=\int_0^{\omega}e^{i\lambda t}\left(i\lambda\alpha-\lambda^2\right)\left(\frac{1-e^{\alpha(\omega-t)}}{\alpha}+N_1(\omega-t)-\frac{1-e^{\alpha\omega}}{\alpha}N_2(t)\right)dt,$$
$$d(\lambda)=\int_0^{\omega}e^{i\lambda t}\left(i\lambda\alpha-\lambda^2\right)\left(-\alpha N_1(\omega-t)-N_2(\omega-t)-\alpha N_1(t)-1\right)dt.$$

Решение задачи фильтрации нестационарных случайных процессов В качестве примера рассмотрим интегральный оператор

$$SG = \int_0^{\omega} K(x,t)G(t,\tau)dt, \tag{9}$$

где $K(x,t) = g(x-t)e^{\frac{-\alpha(x+t)}{2}} + f(x+t)$ – корреляционная функция случайного входного процесса, $f(x+t)$ – эрмитово–неотрицательна, τ фиксированный параметр. Интегральные операторы такого вида встречаются при решении задачи фильтрации нестационарного случайного сигнала на конечном интервале [9]. Оператор (9) можно записать в виде

$$SG = \left(\frac{d^2}{dx^2} + \alpha\frac{d}{dx}\right)\int_0^{\omega} S(x,t)G(t,\tau)dt,$$

где $S(x,t) = g_1(x-t)e^{-\alpha(x+t)/2} + f_1(x+t)$ – ядро оператора S.

Пусть $S(x,t) = \dfrac{\operatorname{sign}(x-t)}{\nu}e^{-\nu|x-t|}e^{\frac{-\alpha(x+t)}{2}} + e^{-(\nu+\frac{\alpha}{2})(x+t)}$. Тогда

$$M_1(x) = S(x,0) = \left(1+\frac{1}{\nu}\right)e^{-(\nu+\frac{\alpha}{2})x},\ M_2(x) = S'(x,0) = \left(-1-\frac{\alpha}{2\nu}-\nu-\frac{\alpha}{2}\right)e^{-(\nu+\frac{\alpha}{2})x},$$

$$M_3(t) = -S(0,t) = \left(\frac{1}{\nu}-1\right)e^{-(\nu+\frac{\alpha}{2})t},\ M_4(t) = -S'(0,t) = \left(1+\frac{\alpha}{2\nu}-\nu-\frac{\alpha}{2}\right)e^{-(\nu+\frac{\alpha}{2})t}.$$

Решая уравнения (5) в классе функций $f(x) = \gamma\delta(x) + \beta\delta(\omega-x) + g(x)$, где $g(x) \in L_2(0,\omega)$, получаем

$$P_1(t) = \frac{\nu}{\alpha}e^{\alpha t} + \frac{2\nu}{\alpha(\nu-1)}\left(\frac{\nu}{\alpha-2\nu} - \frac{1}{\alpha+2\nu}\right)\delta(t) + \frac{2\nu}{\alpha(2\nu-\alpha)}e^{\alpha\omega}\delta(\omega-t),$$

$$P_2(t) = \frac{4}{\alpha^2-4\nu^2}\delta(t), \qquad P_3(t) = \frac{4\nu}{(\nu-1)(4\nu^2-\alpha^2)}\left(1+\frac{\alpha}{2\nu}-\nu-\frac{\alpha}{2}\right)\delta(t),$$

$$P_4(t) = \frac{\nu}{\alpha^2}e^{\alpha t} + \frac{2\nu}{\alpha^2}\left(\frac{1}{\alpha+2\nu} - \frac{e^{\alpha\omega}}{\alpha-2\nu}\right)\delta(\omega-t) + \frac{\nu}{\alpha^2} + \frac{8\nu^2(\nu+1)}{\alpha^2(\alpha^2-4\nu^2)(\nu-1)}\delta(t),$$

$$Q_2(t) = -\frac{\nu}{\alpha}e^{\alpha t} - \frac{2\nu}{\alpha(\nu+1)}\left(\frac{1}{\alpha+2\nu} + \frac{1}{\alpha-2\nu}\right)\delta(t) + \frac{2\nu}{\alpha(\alpha-2\nu)}e^{\alpha\omega}\delta(\omega-t)$$

$$Q_3(t) = -\frac{\nu}{\alpha^2}e^{\alpha t} + \frac{8\nu^2(\nu-1)}{\alpha^2(4\nu^2-\alpha^2)(\nu+1)}\delta(t) - \frac{\nu}{\alpha^2} + \frac{2\nu}{\alpha^2}\left(\frac{e^{\alpha\omega}}{\alpha-2\nu} - \frac{1}{\alpha+2\nu}\right)\delta(\omega-t),$$

$$Q_1(t) = \frac{4}{4\nu^2-\alpha^2}\delta(t),\ Q_4(t) = \frac{4\nu}{(\nu+1)(4\nu^2-\alpha^2)}\left(-1-\frac{\alpha}{2\nu}-\nu-\frac{\alpha}{2}\right)\delta(t).$$

Обобщенные коммутационные соотношения Рассмотрим задачу обращения оператора S вида

$$Sf=e^{-x}\frac{d}{dx}\int_0^{\omega}e^{-t}S(x,t)f(t)dt. \qquad (10)$$

Пусть операторы R и T определены следующим образом

$$Rf=f(x)-2\int_0^{x}sh(x-t)f(t)dt,\ \ Tf=f(x)-2\int_x^{\omega}e^{x-t}f(t)dt,$$

а ядро оператора (10) удовлетворяет уравнению $\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}-2\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial t}-2I\right)S(x,t)=0.$

Если предположить, что $S(x,t)=e^{x+3t}\tilde{S}(x,t),$ тогда для конечномерности оператора $S-RST$ достаточно, чтобы $\tilde{S}(x,t)$ удовлетворяло уравнению

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\tilde{S}(x,t)=0.$$

Легко доказать, что имеют место соотношения:

$$(S-RST)f=\int_0^{\omega}(K_1(x)L_1(t)+K_2(x)L_2(t))f(t)dt,$$

где $K_1(x)=4shx, K_2(x)=-2shx,\ L_1(t)=e^{-t}\int_0^{t}S(0,\xi)d\xi, L_2(t)=S(0,t).$

Используя изложенный подход, можно рассмотреть случай операторного тождества $S-RSR^*=P_n$. Тогда

$$(S-RSR^*)f=Sf(x)-RS\left(f(x)-\int_x^{\omega}e^{t-x}f(t)dt+\int_x^{\omega}e^{x-t}f(t)dt\right)=$$

$$=Sf(x)-R(Sf(x)-e^{-x}\frac{d}{dx}\int_0^{\omega}e^{-t}S(x,t)\int_t^{\omega}e^{\xi-t}f(\xi)d\xi dt+$$

$$+e^{-x}\frac{d}{dx}\int_0^{\omega}e^{-t}S(x,t)\int_t^{\omega}e^{t-\xi}f(\xi)d\xi dt)=\int_0^{\omega}\left(O_1(x)H_1(t)+O_2(x)H_2(t)\right)f(t)dt,$$

где $O_1(x)=-2shx, O_2(x)=-4shx,\ H_1(t)=e^{-t}S(0,t),$

$$H_2(t)=\int_0^{t}sh(t-\xi)e^{-\xi}S(0,\xi)d\xi,$$

а ядро $S(x,t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)-2\left(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial t}\right)-2I\right]S(x,t)=0.$$

Для оператора $Q=S^{-1}$, если он существует и ограничен, верно равенство:

$$(Q-R^{*}QR)f=\int_{0}^{\omega}(G_1(x)\Pi_1^{*}(t)+G_2(x)\Pi_2^{*}(t))f(t)dt,$$

где

$$S(R^{*})^{-1}G_1=-2\operatorname{sh}x, S(R^{*})^{-1}G_2=-4\operatorname{sh}x,$$

$$RS^{*}\Pi_1^{*}=\overline{S(0,t)}, RS^{*}\Pi_2^{*}=\overline{\int_{0}^{t}\operatorname{sh}(t-\xi)e^{-\xi}S(0,\xi)d\xi}.$$

Найдем общий вид обратного оператора Q. Пусть

$$Qf=e^{-x}\frac{d}{dx}\int_{0}^{\omega}e^{-t}Q(x,t)f(t)dt, \tag{11}$$

а ядро $Q(x,t)$ удовлетворяет условию $Q(\omega,t)=0$.

Тогда

$$TQRf=\int_{0}^{\omega}(e^{-x-t}\frac{\partial}{\partial x}Q(x,t)-e^{-x-t}\int_{t}^{\omega}\frac{\partial}{\partial x}Q(x,\xi)d\xi+2e^{-x-t}Q(x,t)+e^{-x+t}\int_{t}^{\omega}e^{-2\xi}\frac{\partial}{\partial x}Q(x,\xi)-$$

$$-4e^{x-t}\int_{x}^{\omega}Q(\xi,t)e^{-2\xi}d\xi-2e^{-x-t}\int_{t}^{\omega}Q(x,\xi)d\xi+4e^{x-t}\int_{x}^{\omega}e^{-2\xi}\int_{t}^{\omega}Q(\xi,\tau)d\tau d\xi+$$

$$+2e^{-x+t}\int_{t}^{\omega}e^{-2\xi}Q(x,\xi)d\xi-4e^{x+t}\int_{x}^{\omega}e^{-2\xi}\int_{t}^{\omega}e^{-2\tau}Q(\xi,\tau)d\tau d\xi)f(t)dt.$$

Введем оператор $Q_1f=\int_{0}^{\omega}\Phi(x,t)f(t)dt,$ где

$$\Phi(x,t)=e^{-x-t}\frac{\partial}{\partial x}Q(x,t)-e^{-x-t}\int_{t}^{\omega}\frac{\partial}{\partial x}Q(x,\xi)d\xi+2e^{-x-t}Q(x,t)+$$

$$+e^{-x+t}\int_{t}^{\omega}e^{-2\xi}\frac{\partial}{\partial x}Q(x,\xi)d\xi-4e^{x-t}\int_{x}^{\omega}Q(\xi,t)e^{-2\xi}d\xi-2e^{-x-t}\int_{t}^{\omega}Q(x,\xi)d\xi+ \tag{12}$$

$$+4e^{x-t}\int_{x}^{\omega}e^{-2\xi}\int_{t}^{\omega}Q(\xi,\tau)d\tau d\xi+2e^{-x+t}\int_{t}^{\omega}e^{-2\xi}Q(x,\xi)d\xi-4e^{x+t}\int_{x}^{\omega}e^{-2\xi}\int_{t}^{\omega}e^{-2\tau}Q(\xi,\tau)d\tau d\xi,$$

То есть $Q_1f=TQRf$. В этом случае

$$(Q_1-TQ_1R)f=TDRf=Cf=\int_{0}^{\omega}C(x,t)f(t)dt,$$

где ядро

$$C(x,t)=e^{-x-t}\frac{\partial}{\partial x}D(x,t)-e^{-x-t}\int_t^{\omega}\frac{\partial}{\partial x}D(x,\xi)d\xi+2e^{-x-t}D(x,t)+$$

$$+e^{-x+t}\int_t^{\omega}e^{-2\xi}\frac{\partial}{\partial x}D(x,\xi)d\xi-4e^{x-t}\int_x^{\omega}D(\xi,t)e^{-2\xi}d\xi-2e^{-x-t}\int_t^{\omega}D(x,\xi)d\xi+ \tag{13}$$

$$+4e^{x-t}\int_x^{\omega}e^{-2\xi}\int_t^{\omega}D(\xi,\tau)d\tau d\xi+2e^{-x+t}\int_t^{\omega}e^{-2\xi}D(x,\xi)d\xi-4e^{x+t}\int_x^{\omega}e^{-2\xi}\int_t^{\omega}e^{-2\tau}D(\xi,\tau)d\tau d\xi.$$

С другой стороны,

$$Cf=(Q_1-TQ_1R)f=\int_0^{\omega}\Phi(x,t)f(t)dt-TQ_1(f(x)-\int_0^{x}e^{x-t}f(t)dt+\int_0^{x}e^{t-x}f(t)dt)=$$

$$=\int_0^{\omega}\Phi(x,t)f(t)dt-T(\int_0^{\omega}\Phi(x,t)f(t)dt-\int_0^{\omega}\Phi(x,t)\int_0^{t}e^{t-\xi}f(\xi)d\xi dt+$$

$$+\int_0^{\omega}\Phi(x,t)\int_0^{t}e^{\xi-t}f(\xi)d\xi dt)=\int_0^{\omega}(\int_t^{\omega}e^{\xi-t}\Phi(x,\xi)d\xi-\int_t^{\omega}e^{t-\xi}\Phi(x,\xi)d\xi-2\int_x^{\omega}e^{x-\xi}\Phi(\xi,t)d\xi+$$

$$+2e^{x-t}\int_x^{\omega}e^{-\xi}\int_t^{\omega}e^{\tau}\Phi(\xi,\tau)d\tau d\xi-2e^{x+t}\int_x^{\omega}e^{-\xi}\int_t^{\omega}e^{-\tau}\Phi(\xi,\tau)d\tau d\xi)f(t)dt.$$

Следовательно,

$$C(x,t)=\int_t^{\omega}e^{\xi-t}\Phi(x,\xi)d\xi-\int_t^{\omega}e^{t-\xi}\Phi(x,\xi)d\xi-2\int_x^{\omega}e^{x-\xi}\Phi(\xi,t)d\xi+2e^{x-t}\int_x^{\omega}e^{-\xi}\int_t^{\omega}e^{\tau}\Phi(\xi,\tau)d\tau d\xi-$$

$$-2e^{x+t}\int_x^{\omega}e^{-\xi}\int_t^{\omega}e^{-\tau}\Phi(\xi,\tau)d\tau d\xi.$$

Дифференцирование полученного равенства приводит к уравнению

$$2\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\frac{\partial}{\partial x}-4I\right)\Phi(x,t)=\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-I\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}-I\right)C(x,t). \tag{14}$$

Применяя соотношения (11)–(14), можно восстановить обратный оператор.

Пусть задан ограниченный в $L_2(0,\omega)$ оператор S вида (2). Оператор $\tilde{A}f=A_0^2f$, где

$$A_0f=\int_0^{x}\frac{1-e^{\alpha(\xi-x)}}{\alpha}f(\xi)d\xi. \tag{15}$$

Выясним, при каких условиях оператор $\tilde{A}S - S\tilde{A}^*$ представляет собой конечномерный оператор. Учитывая (15), получаем

$$\tilde{A}f = \int_0^t (t-\xi)\frac{1+e^{\alpha(\xi-t)}}{\alpha^2} f(\xi)d\xi + 2\int_0^t \frac{e^{\alpha(\xi-t)}-1}{\alpha^3} f(\xi)d\xi,$$

$$\tilde{A}^* f = \int_t^\omega (\xi - t)\frac{1+e^{\alpha(t-\xi)}}{\alpha^2} f(\xi)d\xi + 2\int_t^\omega \frac{e^{\alpha(t-\xi)}-1}{\alpha^3} f(\xi)d\xi.$$

Тогда имеет место соотношение

$$(\tilde{A}S - S\tilde{A}^*)f = \int_0^\omega (N_1(t)M_1(\tau) + N_2(t)M_2(\tau))f(\tau)d\tau,$$

где

$$M_1(\tau) = S'(0,\tau), M_2(\tau) = S(0,\tau),$$

$$N_1(t) = -\frac{t}{\alpha^2}(1+e^{-\alpha t}) + \frac{2}{\alpha^3}(1-e^{-\alpha t}), N_2(t) = \frac{1-e^{-\alpha t}}{\alpha^2} - \frac{t}{\alpha},$$

при этом ядро интегрального оператора должно удовлетворять уравнению

$$\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial\tau^2} + \alpha\frac{\partial}{\partial\tau}\right)^2 - \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \alpha\frac{\partial}{\partial t}\right)^2\right] S(t,\tau) = 0.$$

Если у оператора S вида (2) существует ограниченный обратный T, то он удовлетворяет соотношению

$$(T\tilde{A} - \tilde{A}^*T)f = \int_0^\omega (Q_1(t)P_1^*(\tau) + Q_2(t)P_2^*(\tau))f(\tau)d\tau,$$

где $S^*P_1 = M_1^*, S^*P_2 = M_2^*, SQ_1 = N_1, SQ_2 = N_2$.

Рассмотрим аналогичную задачу для оператора $\tilde{A}S - SB$, когда

$$\tilde{A}f = \int_0^t (t-\xi)\frac{1+e^{\alpha(\xi-t)}}{\alpha^2} f(\xi)d\xi + 2\int_0^t \frac{e^{\alpha(\xi-t)}-1}{\alpha^3} f(\xi)d\xi,$$

$$Bf = \int_0^t \frac{1-e^{\alpha(\xi-t)}}{\alpha} f(\xi)d\xi.$$

В этом случае получаем

$$(\tilde{A}S - SB)f = \int_0^\omega (N_1(t)M_1(\tau) + N_2(t)M_2(\tau))f(\tau)d\tau,$$

где

$$M_1(\tau)=S'(0,\tau), M_2(\tau)=S(0,\tau),$$

$$N_1(t)=-\frac{t}{\alpha^2}(1+e^{-\alpha t})+\frac{2}{\alpha^3}(1-e^{-\alpha t}), N_2(t)=\frac{1-e^{-\alpha t}}{\alpha^2}-\frac{t}{\alpha},$$

при этом ядро интегрального оператора должно удовлетворять уравнению

$$\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\alpha\frac{\partial}{\partial t}\right)^2-\left(\frac{\partial^2}{\partial \tau^2}-\alpha\frac{\partial}{\partial \tau}\right)\right]S(t,\tau)=0.$$

Обратный оператор T к оператору S вида (2) удовлетворяет соотношению

$$(T\tilde{A}-BT)f=\int_0^{\omega}R(t,\tau)f(\tau)d\tau,$$

где $R(t,\tau)=Q_1(t)P_1^*(\tau)+Q_2(t)P_2^*(\tau)$, $S^*P_1=M_1^*, S^*P_2=M_2^*, SQ_1=N_1, SQ_2=N_2$.

Пусть

$$Tf=\left(\frac{d^2}{dx^2}+\alpha\frac{d}{dx}\right)\int_0^{\omega}F(x,t)f(t)dt, \tag{16}$$

причем $F(\omega,0)=0, \int_0^{\omega}\left|F(x+\Delta x,t)-F(x,t)\right|^2 dt \le \|T\|^2\left|\Delta x\right|.$

Можно показать, что

$$BT\tilde{A}f=\int_0^{\omega}f(t)\int_t^{\omega}\left(-\frac{1-e^{-\alpha x}}{\alpha}F'(0,\xi)+F(x,\xi)-e^{-\alpha x}F(0,\xi)\right)\times$$
$$\times\left((\xi-t)\frac{1+e^{\alpha(t-\xi)}}{\alpha^2}+2\frac{e^{\alpha(t-\xi)}-1}{\alpha^3}\right)d\xi dt.$$

Обозначим через $T_1f=\int_0^{\omega}G(x,t)f(t)dt$, где

$$G(x,t)=\int_t^{\omega}\left(-\frac{1-e^{-\alpha x}}{\alpha}F'(0,\xi)+F(x,\xi)-e^{-\alpha x}F(0,\xi)\right)\times$$
$$\times\left((\xi-t)\frac{1+e^{\alpha(t-\xi)}}{\alpha^2}+2\frac{e^{\alpha(t-\xi)}-1}{\alpha^3}\right)d\xi, \tag{17}$$

$G(x,\omega)=0.$

Тогда $T_1f=BT\tilde{A}f$ и $T_1\tilde{A}-BT_1=H$, $Hf=BR\tilde{A}f=\int_0^{\omega}H(x,t)f(t)dt,$

$$H(x,t)=\int_t^{\omega}\left(-\frac{1-e^{-\alpha x}}{\alpha}R'(0,\xi)+R(x,\xi)-e^{-\alpha x}R(0,\xi)\right)\times$$
$$\times\left((\xi-t)\frac{1+e^{\alpha(t-\xi)}}{\alpha^2}+2\frac{e^{\alpha(t-\xi)}-1}{\alpha^3}\right)d\xi. \qquad (18)$$

Так как

$$(T_1\tilde{A}-BT_1)f=\int_0^{\omega}f(t)\int_t^{\omega}G(x,\xi)\left((\xi-t)\frac{1+e^{\alpha(t-\xi)}}{\alpha^2}+2\frac{e^{\alpha(t-\xi)}-1}{\alpha^3}\right)d\xi dt-$$
$$-\int_0^{\omega}f(t)\int_0^{x}G(\xi,t)\frac{1-e^{\alpha(\xi-x)}}{\alpha}d\xi dt,$$

имеет место уравнение

$$\int_t^{\omega}G(x,\xi)\left((\xi-t)\frac{1+e^{\alpha(t-\xi)}}{\alpha^2}+2\frac{e^{\alpha(t-\xi)}-1}{\alpha^3}\right)d\xi-\int_0^{x}G(\xi,t)\frac{1-e^{\alpha(\xi-x)}}{\alpha}d\xi=H(x,t).$$

Дифференцируя последнее уравнение по x и по t, получаем

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\alpha\frac{\partial}{\partial t}\right)^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\alpha\frac{\partial}{\partial x}\right)H(x,t)=\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\alpha\frac{\partial}{\partial x}\right)G(x,t). \qquad (19)$$

Таким образом, с помощью формул (16)–(19) можно получить представление для обратного оператора T.

то есть $\hat{A}_1=A_1^2,\ \hat{A}_{21}=A_2^2$, где $A_1f=i\int_0^{x_1}f(t_1,x_2)dt_1,\ \ A_2f=i\int_0^{x_2}f(x_1,t_2)dt_2$.

Задача обращения некоторых новых классов интегральных операторов методом операторных тождеств, доказательство конечномерности соответствующих коммутационных операторов, исследование структуры обратного оператора автором настоящей статьи представлены в работах [10]–[12].

ЛИТЕРАТУРА

1. Амбарцумян В.А. Научные труды. – Ереван, 1960. – 430с.
2. Соболев В.В. Рассеяние света в атмосферах планет. – М.: Наука, 1972. – 335с.
3. Иванов В.В. Перенос излучения и спектры небесных тел. – М.: Наука, 1969. – 472с.

4. Сахнович Л.А. Уравнение с разностным ядром на конечном отрезке. // Успехи математических наук. – М.,1980. – т.35, Вып. 4 (214). – С.69–129.
5. Кальмушевский И.И. О решении некоторых интегральных уравнений с ядрами, зависящими от разности и суммы аргументов. // Дифференциальные уравнения. Математика. – 1980. – т. 16, №5. – С. 941 – 943.
6. Нерсесян А.Б., Чернявская Н.А. Об обращении интегральных операторов с почти разностным ядром. // ДАН Арм. ССР. – 1984. – т. 79, №1. – С. 10 – 14.
7. Сахнович А.Л. Обращение операторов, удовлетворяющих двум операторным тождествам. / Ин-т гидромеханики. – Одесса, 1986. – 12 с. – Деп. В ВИНИТИ №4954 – В 86.
8. Стоян Ю.Г., Золотарев В.А., Янцевич А.А. и др. Обращение интегральных операторов методом коммутационных соотношений. Препринт АН УССР. Ин-т проблем машиностроения; 332, Харьков, 1990. – 56 с.
9. Пугачев В.С. Теория случайных функций и ее применение к задачам автоматического управления. – М.: ГТТИ, 1957. – 659с.
10. Аршава Е.А. Об одном классе интегральных уравнений со специальной правой частью. // Труды 5-й международной конференции «Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений»: в двух томах. – Т.1. Математический анализ. – Минск: Институт математики НАН Беларуси, 2010. – С. 25 – 29.
11. Аршава Е.А. Обращение интегральных операторов на основе обобщенных коммутационных соотношений. // Материалы Воронежской зимней математической школы «Современные методы теории функций и смежные проблемы». – Воронежский государственный университет, 2011. – С.19– 24.
12. Аршава Е.А. Обращение векторных интегральных операторов. // Материалы Воронежской весенней математической школы «Современные методы теории краевых задач». – Воронежский государственный университет. – 2011. – С.16– 21.